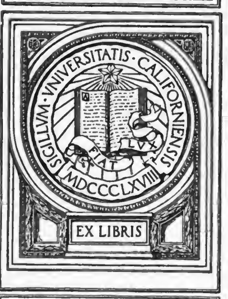

UC-NRLF
B 4 573 133


SIGILLVM · VNIVERSITATIS · CALIFORNIENSIS
LVX
FIAT
MDCCCLXVIII
EX LIBRIS

Beispiele zur Logik

aus der

Mathematik und Physik

im Anschlusse an

F. A. Trendelenburgs Elementa logices Aristoteleae

zusammengestellt

von

Prof. P. **Freyer**, Dr. phil.

Zweite Auflage.

Berlin.
Verlag von W. Weber.
1889.

Vorwort.

Eine bleibende Frucht des mathematisch-physikalischen Unterrichtes ist neben der Kenntnis des Realen der Gewinn, dass der Sinn für folgerichtiges Schliessen und für sichere Entwickelungen geschärft, das geistige Auge für das Erkennen dessen, was als Ursache und was als Wirkung sich zeigt, geübt und so dem Irrtum und der Phrase entgegengewirkt wird. Fast in keiner Disciplin scheidet sich das Wissen vom Nichtwissen so streng, wie in der Mathematik, und würde auch nur das gewonnen, dass die mathematischen Lehrstunden sich als ein energisches Zuchtmittel zur Wahrhaftigkeit erwiesen, die aufgewandte Mühe lohnte sich reichlich genug.

Bei der fortwährenden Wechselwirkung wie zwischen Lehrer und Schüler so auch zwischen Schüler und Schüler hat es seinen besonderen Reiz, das Zeitigen der geistigen Kräfte bei der Erfassung des Gegenstandes zu beobachten. Die Verschiedenheit der Individuen erhöht ihn. Bei dem einen, sei er auch sonst von mittlerer Begabung, ist es, als ob der Weg, dem einfachsten Kausalzusammenhange nachzugehen, vollständig verbaut wäre, einem anderen erschliessen sich selbst schwierigere Folgerungen mit Leichtigkeit; der eine vermag zunächst nicht die allereinfachste Figur zu verstehen, ein anderer entwirft mit sicherer Phantasie die nötigen Zeichnungen im Kopfe, ohne das auf der Tafel fixierte Schema zu bedürfen. Wie schwer ist es oft in den ersten physikalischen Lehrstunden, die Schüler bei der Vorführung eines Experimentes das Wesentliche vom Unwesentlichen unterscheiden zu lehren und sie erkennen zu lassen, dass ein post hoc nicht stets ein propter hoc ist, oder beim späteren Unterrichte, dass eine Hypothese (im neueren Sinne) nicht eine zu Grunde liegende

Thatsache! — Und doch kann nimmermehr angenommen werden, dass die geistige Thätigkeit, die durch Analysis und Synthesis die Deutung einer Stelle im Autor findet oder den Zusammenhang etwa eines platonischen Dialoges erfasst, eine wesentlich andere sei als die, welche eine mathematische Aufgabe löst oder eine Reihe zusammengehöriger physikalischer Erscheinungen versteht. Solchen Schwierigkeiten liegen zumeist Mängel der ersten Vorbildung zu Grunde, und hieraus erwächst dem Lehrer die Aufgabe, diese Lücken, wenn es noch möglich ist, auszufüllen, Hindernisse hinwegzuräumen, die Schwerfälligkeit des Schülers zu heben und die schlummernde Kraft durch gelingende einfachere Versuche zu reizen, bis sie sich anfrafft und durch Zumutung grösserer Aufgaben erstarkt. — Kein Lehrer, mag er sich auch ablehnend gegen die Philosophie verhalten, kann dabei der Logik entbehren, wenn er, den Gründen solcher Hemmungen nachdenkend, dieselben fortzuschaffen sich bemüht.

Solchen Beobachtungen und Betrachtungen entstammen die folgenden Erörterungen über die im mathematisch-physikalischen Schulunterrichte vorkommenden wichtigsten logischen Verhältnisse. Was die Reihenfolge der zu besprechenden Formen betrifft, so schliesse ich mich in dankbarer Erinnerung an die mir liebgewordenen Bücher Trendelenburgs („Elementa logices Aristoteleae.“ ed. VIII. und „Erläuterungen zu den Elementen Aristotelischer Logik“. Dritte Auflage.) an, da dieselben für die Zwecke der Schule vollkommen genügen, überall auf die Verbindung des Formalen mit dem Realen dringen und, wie kein anderes der ausserdem erschienenen Schulbücher für philosophische Propädeutik, die historische Entstehung der jetzt noch gebräuchlichen termini geben und dadurch dem späteren Universitätsunterrichte in die Hand zu arbeiten geeignet sind. Da sie unmittelbar aus einer Quelle schöpfen, die immer wieder aufgesucht werden muss, haben sie durch diese Ursprünglichkeit etwas für sich, das sie nicht als antiquiert erscheinen lassen darf und wird. Möge auch die Vorrede zu den „Erläuterungen“ oft von Pädagogen gelesen und beherzigt werden! —

Es liegt in der Natur der Sache, dass die Elementa logices nicht gleichmässig Abschnitt für Abschnitt behandelt werden können. In der Mathematik und Physik sucht man nach allgemeinen und be-

jahenden Sätzen, das Gesetz der Kausalität ist durchgreifend, es wiegt der Syllogismus vor gegenüber der Induktion, in ihm die erste Figur gegenüber den anderen, die strenge Deduktion gegenüber dem Beispiele und der Analogie, das apodiktische Urteil gegenüber dem problematischen. Doch ist die Reihenfolge beibehalten, und der Abkürzung wegen wird auf die betreffenden Paragraphen der oben genannten Bücher verwiesen, sodass das Folgende nicht etwas für sich Bestehendes ist, sondern das Verständnis der bezüglichen Stellen des Aristoteles voraussetzt[1]. —

In den Beispielen versuche ich es vorzugsweise diejenigen Teile des Gymnasialkursus zu berücksichtigen, die den Schülern oberer Klassen am nächsten liegen; sie sind geläufiger und erfordern, wenn das Kriterium für die Wahrheit der hierher gehörigen Theorieen nicht auf der Hand liegt, schon an sich eine Betrachtung von der logischen Seite her. — Im Unterrichte habe ich oft gefunden, dass Primaner in dem Semester, in welchem Logik gelehrt wurde, leichter schwerere Beweisführungen verstanden, und dass auch umgekehrt die letzteren als Beispiele das Interesse für den logischen Unterricht erhöhten. —

Es soll auch hier nud da ein Satz aus der vortrefflich zum Unterrichte sich eignenden sogenannten neueren Geometrie zur Sprache kommen. Die Allgemeinheit und reiche Fruchtbarkeit dieser Sätze, die Eigentümlichkeit der Beweisführung, das Interesse, dass sie bei reiferen Schülern der oberen Klassen erfahrungsmässig erregen, drängen auf Berücksichtigung derselben auch im Gymnasialkursus hin.

Die Exemplare des Programmes vom Jahre 1872, von dessen Einleitung das Wesentliche in Vorstehendem enthalten ist, sind seit einiger Zeit vergriffen; eine Anzahl Aufforderungen, die Abhandlung zuzusenden, konnte nicht mehr berücksichtigt werden. — Die kleine Schrift wird nun nochmals abgedruckt, einiges, besonders aus der Physik, hinzugefügt, anderes hinweggelassen. Ich hoffe, dass Lehrern der Logik und denjenigen Spezialkollegen, die beim Unterrichte die logische Seite fest im Auge zu behalten pflegen, diese zweite Auf-

[1]) Leicht schliessen sich die Beispiele an auch dem „Abriss der Logik“ von K. A. J. Hoffmann. Halle 1888.

lage nicht unwillkommen sein wird. Dem ausgezeichneten Werke von W. Wundt (Logik, 1880—83), das denen, die von dem engen Zusammenhange aller Wissenschaften mit der Philosophie überzeugt sind, ganz unentbehrlich sein muss, verdanke ich die reichste Anregung. —

Ilfeld a./H., Weihnachtsferien 1888.

Freyer.

I. Qualität des Urteils: Bejahung und Verneinung.

(§§ 1. 2. 3. 4. 5.)

Die Wissenschaft strebt darnach, im Denken das Wesen der Dinge, wie es in ihren Thätigkeiten in die Erscheinung tritt und der Erkenntnis zugänglich wird, wiederzuerzeugen; dies geschieht in den bejahenden Urteilen, und da wir zunächst im Werden das Sein erfassen, nicht das Nichtsein, so suchen wir vorzugsweise solche. Das Verneinen entsteht durch Vergleichung und somit durch Abstraktion; wo es hinterdrein begehrt wird, hat es die Bedeutung eines Mittels, die Bejahung des Gegenteils zu befestigen[1]). So findet sich in der Mathematik unter hundert bejahenden Sätzen kaum ein verneinender, und wo ein solcher erscheint, da ist der entsprechende bejahende der frühere und wichtigere. — In der Stereometrie tritt z. B. der Satz auf: „mehr als fünf reguläre Körper sind nicht möglich.“ Sei es nun, dass er aus der Natur der Ecke, deren Seitenwinkel zusammen weniger als 360° betragen müssen, oder aus der Euler'schen Formel ($e + f = k + 2$) vermittelst diophantischer Gleichungen bewiesen wird,[2]) — das bejahende Urteil lautet dann zuerst; „fünf reguläre Körper sind möglich.“ Die Verneinung kommt hinterdrein und tritt erst dann als Ergebnis hinzu, nachdem gezeigt ist, dass jede andere Art, durch Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke, Polyeder mit gleichartigen Grenzflächen und mit Ecken, in denen gleichviel Kanten zusammenstossen, sowie durch Sechsecke etc. zu erzeugen, über die Grenzen der Bedingungen hinausgeht. Die Bestimmung der Anzahl von Werten, welche diophantischen Gleichungen genügen, gehört hier-

---

[1]) Vergl. Wundt, Logik I. pag. 187.

[2]) Die zweite Ableitung ist vorzuziehen, da sie darthut, dass die fünf Körper nicht vollständige Regelmässigkeit beanspruchen. —

her. Z. B. ist $x = 13 - 4\gamma$, so sind vier positive Werte für x möglich für $\gamma = 0, 1, 2, 3$; damit ist aber die Zahl der Fälle erschöpft. — Das reflektierende Denken, die Bejahung durch die spätere Verneinung begrenzend, scheidet dann dadurch die erkannte Thatsache von anderen durch das begleitende „nur“ aus.

Daher sucht die Mathematik auch, sich nicht mit negativen Ergebnissen begnügend, stets das unendlich weite Gebiet des „Nicht A“ zu bestimmen. Dem Satze: „Gleiche Sehnen oder gleiche Kugelkreise sind vom Mittelpunkte gleichweit entfernt“ und seinen Umkehrungen stellt sie deshalb nicht den Satz gegenüber: ungleiche Sehnen sind ungleichweit vom Mittelpunkte entfernt, — sondern das successive Wachsen und Abnehmen der Sehne in seiner Kausalität verfolgend sagt sie: „die grössere Sehne hat den kleineren Abstand.“

Der Begriff des geometrischen Ortes, sei es in den einfachsten Beispielen, sei es in schon mehr zusammengesetzten Formen, giebt weitere Belege für solche bejahende Urteile, die sich durch die begleitenden Verneinungen der einzelnen Arten des Gegenteils abgrenzen.

Die Linie oder Fläche, auf welcher alle Punkte liegen, die einer gegebenen Bedingung entsprechen, wird der geometrische Ort des Punktes genannt. Es wird z. B. gezeigt, dass das Mittellot der Strecke mn die Eigenschaft besitze, dass die auf ihm liegenden Punkte von m und n gleiche Entfernung haben, weiter aber auch, dass jeder Punkt ausser ihm weiter von m als von n oder umgekehrt entfernt sei. Aus beiden Urteilen, dem ersten bejahenden und dem zweiten, das sich nur durch Vergleichung mit dem ersten als ein verneinendes zeigt, folgt dann das den Begriff des geometrischen Ortes festsetzende „nur“. Der Kreis, die Kegelschnitte, die Parallelen, die Potenzlinien u. s. w. liefern fortwährend Beispiele hierzu. Die Anschauung wird gewonnen durch die Kenntnis des bejahenden Urteils und wird eine ausschliessliche durch die Verneinung, die an sich nur ein Unbestimmtes ergäbe.

Die Konversion der Urteile wird Gelegenheit geben, noch einmal auf diese Angelegenheit zurückzukommen.

II. Quantität des Urteils: allgemeines, besonderes, einzelnes.

(§ 6.)

Auf den niedrigsten Stufen des mathematischen Unterrichtes werden eine Menge Dinge als einzelne gelehrt, die erst später zur Allgemeinheit erhoben werden: $\frac{3}{4} \times 5 = \frac{3 \cdot 5}{4}$ ist zunächst nur für dieses einzelne Beispiel gültig; die Gesetze der Multiplikation und Division u. s. w. mit mehrzifferigen Zahlen lassen wir in den Volksschulen üben, ehe und ohne dass die allgemeinen Gesetze der Rechnungen mit Polynomen kennen gelernt werden, obwohl jene auf diesen beruhen. Und doch wird auch hier ein Allgemeines erstrebt, wenn auch nicht in der Form. Es muss sich als ein Niederschlag der Übung von selbst stillschweigend bilden.

Auch im weiteren arithmetischen Unterrichte zeigt sich dasselbe. — Bei dem Multiplizieren und Dividieren werden Rechnungen wie $a^3 a^2 = a^5$ oder $a^6 : a^2 = a^4$ geübt, noch ehe die allgemeinen Regeln der Potenzen bekannt sind; wir gebrauchen die Formel des Quadrats eines Binoms zur Quadrierung und zum Ausziehen der Quadratwurzel, oder zur Lösung der quadratischen Gleichungen ehe der Binomialsatz gelehrt wird, und doch ist dieser das Allgemeine, jene Formel das Besondere. So wird auch in dem Elementarunterrichte der höheren Schule die Erkenntnis des Allgemeinen oft zunächst durch Gewöhnung vorbereitet. —

In den geometrischen Teilen des Unterrichtes tritt diese Unterscheidung nicht so unmittelbar hervor, es sei denn, dass man die Bedeutung des sogen. propädeutischen Anschauungsunterrichtes mit berücksichtige (vergl. unten über Modalität des Urteils). Der wissenschaftliche Unterricht in der Geometrie erstrebt von vornherein allgemeine Urteile. Obwohl ja in der Zeichnung z. B. bei dem Beweise, dass die Summe der Winkel eines Dreiecks zwei rechte beträgt, das gezeichnete Dreieck immer ein individuelles, nicht nur ein gleichseitiges, ungleichseitiges u. s. w., sondern sogar nur dieses gleichseitige u. s. w. ist, so liegt doch die Besorgnis, als gelte dieser Satz nicht allgemein, nicht nahe, da ja das Besondere nicht als solches irgendwie in den Vordergrund tritt. — Es giebt auch für den Lehrer

genug Mittel, dem Bilde der inneren Anschauung die Allgemeinheit zu sichern; möglichst vielerlei Figuren auf der Tafel werden entworfen, jeder Schüler zeichnet seine besondere Figur in sein Heft; die Bezeichnung mit Buchstaben wird bei fortschreitender Übung weggelassen, bis schliesslich die Figur ohne irgend ein äusserliches, sinnliches Hülfsmittel frei im Kopfe construiert wird.

Am wichtigsten ist es aber, die Bedeutung des allgemeinen Urteils für die Entwickelung und Erweiterung der Erkenntnis überall nachzuweisen und zu zeigen, dass je höher die Erkenntnis anfsteigt, desto umfassender, übersichtlicher sie sich gestaltet, und dadurch, dass das Allgemeine schöpferisch wirkt, desto mehr der Verstand die Erscheinungen beherrscht.

Wer die allgemeinen Gesetze der arithmetischen Zahlenreihe erkennt, kennt auch die der natürlichen, wenigstens insoweit, als sie sich als 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, u. s. w. darstellt; wer den Satz versteht, dass der Peripheriewinkel die Hälfte des auf demselben Bogen stehenden Centriwinkels ist, kennt auch den Satz des Thales.

Was von einem geometrischen Begriff in seinem ganzen Umfange gilt, gilt auch von seiner Grenze. Dieses Prinzip ist nichts als ein Beispiel der schöpferischen Kraft des Allgemeinen und liefert Besonderes, nicht nur als einzelne Fälle, sondern als für sich bestehende Sätze. Ist z. B. einmal festgestellt, dass die Tangente nichts ist, als die Sehne in ihrer Grenzlage, indem die zwei Durchschnittspunkte zusammenfallen, so ist auch klar, dass der allgemeine Satz vom Peripherie- und Centriwinkel den Fall: „der Winkel (bae) zwischen Sehne (ab) und Tangente (ae) ist gleich dem Peripheriewinkel auf dem eingeschlossenen Bogen“ in sich schliesst. Denn dieser Satz ist dann nichts als der Grenzfall des allgemeinen Satzes, wenn nämlich der Punkt d, der die Freiheit hat, sich auf dem entgegengesetzten Bogen zu bewegen, mit dem Berührungspunkte a zusammenfällt.

So bedarf es, die Anwendung dieses Prinzips vorausgesetzt, keines Beweises mehr für den Satz, dass die Tangente die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Sehne sei.

Als Beispiel für die Macht des Allgemeinen ist zu zeigen, wie der Satz: „die auf dem Radius eines Kreises im Endpunkte desselben

errichtete Senkrechte ist Tangente", nur ein spezieller Fall von dem Satze, dass die den Winkel der Brennstrahlen halbierende Linie die Ellipse berühre; oder, dass die Sätze von den Brennstrahlen, die von einem Brennpunkte nach den Berührungspunkten zweier Ellipsentangenten gezogen werden, dsgl. von den Linien, die aus beiden Brennpunkten nach dem Durchschnitte zweier Tangenten gehen, sehr leicht bekannte Sätze der Kreislehre liefern. — Die Beispiele lassen sich leicht vermehren.

Die Sätze des Pascal und Brianchon — setzen wir sie auch nur für den Kreis bewiesen voraus — liefern weiter hierfür die schönsten Beispiele. Das Sehnensechseck im Satze des Pascal vereinfacht sich durch Zusammengleiten je zweier Punkte in einen allmählich zu einem Fünfeck, Viereck. Dreieck; die Sache bleibt, das Allgemeine liefert drei neue Sätze („von oben herab").

Die Umkehrung des Ceva'schen Satzes über Ecktransversalen zeigt weiter auf treffende Weise, wie auf höherer Stufe mit einem Schlage neue Wahrheiten entwickelt werden können, die auf niederer nur mühsam sich ableiten lassen und dort unverbunden bleiben. Es treten in den Elementen eine Anzahl Sätze auf, die von dem Durchschneiden der Ecktransversalen eines Dreiecks handeln (die drei Mittellinien, die drei Höhen etc.). Alle Beweise absolviert der angeführte Satz, dass die drei Ecktransversalen, die auf den Seiten derartige Abschnitte bilden, dass das Produkt dreier getrennten gleich dem der andern drei getrennten sei, sich in einem Punkte schneiden.

Das Bestreben, in der Geometrie allgemeine Urteile zu gewinnen, führt besonders in den Lehren der neueren Geometrie zu eigentümlichen Wendungen der Sprache. Es ist unbequem, immer und immer wieder die Fälle, dass sich zwei Linien schneiden, oder dass sie parallel sind, als zwei verschiedene zu fassen und hindert die allgemeinen Formen der Urteile. Es ist daher ein glücklicher, weil nicht nur dieser Abbreviatur wegen brauchbarer, sondern auch erspriesslicher Gedanke, durch die Einführung des unendlich entfernten Punktes (der unendlich entfernten Geraden und Ebene) über diese fortwährenden Specialisierungen hinweg zu kommen. [1])

---

[1]) Vergl. J. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie. Tl. II.

Solche Beispiele, in denen das Allgemeine als ein nachträglich durch Abstraktion gewonnenes Resultat erscheint (vergl. unten Schlüsse der Induktion), sind in der Mathematik selten. Sie gehören meistens der Empirie an. Wo sie erscheinen, wie z. B. in dem Satze, dass die Regeln der Potenzrechnung auch für negative und gebrochene Exponenten gelten, wollen sie die Übersicht erleichtern.

III. Modalität des Urteils: assertorisches, problematisches, apodiktisches.

(§ 7.)

Da die wissenschaftliche Mathematik überall nur Wert auf das legt, was als notwendig und als allgemein gilt, so lassen sich schwerer als in andern Wissenschaften Belege für diese Verhältnisse finden. Die Geschichte der Wissenschaft einerseits und der Gang des propädeutischen Unterrichtes in der Mathematik, wie er zuweilen geübt wird, ist heranzuziehen, um Einsicht in den Stufengang der Erkenntnis, in den Fortschritt von der Thatsache zur Notwendigkeit zu gewinnen.

Werden die drei Winkel eines Dreiecks wirklich gemessen und ihre Summe gleich 180° gefunden, so ist dies zunächst nur ein assertorisches Urteil, das Urteil der beobachteten Thatsache[1]). Mit solchen Urteilen muss sich der Handwerker begnügen, wenn man ihn lehrt, dass sich der Halbmesser sechsmal als Sehne in den Kreis eintragen lässt, dass ein Dreieck, welches die Seiten 3, 4, 5 hat, ein rechtwinkeliges sei, dass der Bruch $\frac{22}{7}$ dem Verhältnisse der Peripherie zum Durchmesser sich nähere u. s. w. Auf der niederen Stufe lehren wir wohl auf diese Weise Lote konstruieren, Quadrate zeichnen u. s. w., müssen jedoch, wenn solcher Unterricht dem eigen-

---

pag. 3. „Der unendlich entfernte Punkt verbindet gewissermassen die nach entgegengesetzten Seiten hin verlaufenden Enden der geraden Linien und stellt eine Kontinuität her, entsprechend der kontinuierlichen Drehung des Strahles im Strahlbüschel."

[1]) Vergl. Wundt, Logik I. pag. 198. — T. A. Lange, Logische Studien (1877), pag. 58. — Doch giebt Lange der beobachteten Thatsache eine grössere Bedeutung. —

lich wissenschaftlichen nicht schaden, sondern sich als einen solchen, der nach der Seite der Erkenntnis hin sich als ergänzungsbedürftig auch dem Geiste des Knaben zeigen soll, auf die Unzulänglichkeit der Erkenntnisgründe stets aufmerksam machen. — Denn wenn auch Wiederholungen solcher Messungen und Konstruktionen geeignet sind, die Gewissheit über die Richtigkeit vorzubereiten, so erhebt sich die Reflexion doch noch nicht auf dieser Stufe über das unbestimmte Urteil der Möglichkeit. — In der Krystallographie geben wir, damit die Gestalt eines Krystalles sich besser dem Gedächtnisse einpräge, dem Schüler die Formel $f + e = k + 2$ als Anhalt, und lassen sie an irgend einer Form, z. B. der sechsseitigen Säule, erkennen: es kann sich durch vielfältiges Verificieren dieses selben Gesetzes die Erkenntnis wohl bis zur Wahrscheinlichkeit erweitern; vor dem stereometrischen Unterricht erreicht sie aber ihre Vollendung noch nicht. Es ist die klare Auffassung des inneren Grundes, der allein die Notwendigkeit, das „es muss so sein“, dem Geiste erschliesst und zwar um so vollständiger und tiefgehender, je einfacher und dem Gedanken zugänglicher der Kausalnexus sich zeigt, je unmittelbarer er bis zu den Prinzipien herabgeht. Es befriedigt auch in der Mathematik nicht ein Beweis desselben Lehrsatzes wie der andere, wenn sie auch beide den Zweifel zu heben im stande sind. Dass die Gegenwinkel im Sehnenviereck des Kreises supplementär sind, kann bewiesen werden mit Hilfe der Diagonalen, aber auch durch den Satz vom Peripherie- und Centriwinkel; das letztere ist befriedigender, weil unmittelbarer. Der Binomialsatz kann bewiesen werden durch den Kästner'schen Beweis vermöge der sogen. vollständigen Induktion, aber auch durch die Kombinationslehre; jener erste Beweis, obwohl logisch richtig, genügt jedoch weniger, weil er als eine von aussen kommende; nicht unmittelbar in der Sache liegende Verifikation eines schon Gefundenen erscheint.

Klarer noch und öfterer zeigt sich der Unterschied zwischen diesen Stufen des Wissens, wenn wir Beispiele aus der Physik mit in die Betrachtung hereinziehen. Wenn Galilaei den Isochronismus der Schwingungen eines Pendels, der kleine Bögen beschreibt, beobachtet, so ist dies zunächst ein assertorisches Urteil, das erst durch

die mathematische Deduktion sich zu apodiktischer Gewissheit erhebt.[1]) Ähnlich verhält es sich mit jedem Experimente; ausserhalb der blossen Thatsache steht in vollster Strenge die Notwendigkeit erst dann, wenn die Mechanik aus den einfachsten Prinzipien die Gesetze ableitet und sich der Erscheinungen auf diese Weise bemächtigt. Mag der freie Fall durch die Atwood'sche Maschine, der Stoss durch pendelnde Kugeln, der Wurf vermittelst der Kugel, welche durch nach der Form der Parabel angebrachte Ringe im Bogen herabfällt, veranschaulicht werden: der zweifelnden Frage wird dann immer noch Raum gelassen.

IV. Relation des Urteils: kategorisches, hypothetisches, disjunktives.

(§ 8.)

Es ist zunächst leicht, unter den Urteilen diejenigen, in denen das Prädikat allgemeiner als das Subjekt ist oder denselben Umfang hat, (die kategorischen und hypothetischen) von denen zu sondern, die einen Begriff in seine verschiedenen Unterarten gliedern, und diese Unterscheidung an den dem Unterricht entnommenen Urteilen nachzuweisen. — Jeder Lehrsatz und jede Definition liefert Beispiele der ersten Art, jede Division Beispiele der andern. So bestimmen sich zunächst leicht die Urteile des Inhalts und des Umfangs.[2])

Aber eine eigentümliche Schwierigkeit liegt darin, das kategorische Urteil von dem hypothetischen begrifflich zu sondern. Wollte man die Sache nur als eine Frage der Grammatik auffassen, so wäre man allerdings rasch fertig: die Antwort würde die Form als Kriterium geben, aber ein und dasselbe Urteil könnte sowohl kategorisch als auch hypothetisch sein.

Das Kriterium der Inhärenz und Subsistenz für das kategorische, der Kausalität und Dependenz für das hypothetische versagt, denn die Ursache kann in mathematischen Ableitungen nie eine andere sein, als eine dem Subjekt inhärierende. Drobisch[3]) hat die

[1]) Vergl. dagegen Sigwart, Logik I. pag. 230 ff.

[2]) Logische Untersuchungen. II. pag. 268.

[3]) Neue Darstellung der Logik. 5te Auflage. pag. 47.

einen als Beschaffenheitsbestimmungen, die anderen als Beziehungsurteile aufgefasst; aber abgesehen davon, dass das Wort Beziehung ein gar vieldeutiges ist, gerät er zu einer Anzahl Mischformen und muss rein hypothetische, kategorisch-hypothetische und hypothetisch-hypothetische unterscheiden, eine Unterscheidung, die wohl für die erste Einführung in die Logik zu kompliziert ausfallen dürfte. Der Umfang des kategorischen ist bei ihm demnach ein sehr weiter und seine Art der Bezeichnung gerät durchaus mit dem alten Sprachgebrauche der Mathematik in Konflikt, der auch in dem einfachsten Lehrsatze eine Hypothesis und eine Thesis unterscheidet. Nach Drobisch (pag. 47) ist der Satz: „das gleichseitige *Dreieck* ist gleichwinkelig“ ein kategorisches Urteil, dem man allerdings die hypothetische Form geben kann. Ist aber die Form etwas so Willkürliches, dass sie ohne innere Gründe angenommen wird?

In den logischen Untersuchungen (Teil II. pag. 274 u. f.) werden folgende Hauptunterschiede angegeben. Im hypothetischen Urteile hat Subjekt und Prädikat eine grössere Selbständigkeit, beide können für sich gedacht werden, das hypothetische Urteil ist das der schärferen Reflexion, in dem hypothetischen Urteile wird die Kausalität strenger hervorgehoben. Es sei die Bemerkung erlaubt, dass in den komparativen Ausdrücken: „grösser, strenger, schärfer“ etwas Subjektives liegt, welches die auseinander haltenden Grenzen wieder zu fliessenden macht.

Nehmen wir an, um auch dem alten Sprachgebrauche gerecht zu werden, dass das hypothetische Urteil die Form der Kausalität ist, so könnte die Unterscheidung also gemacht werden: unter kategorischen Urteilen sollen die verstanden werden, welche die *konstitutiven* Merkmale als Prädikate vom Subjekte aussagen, unter hypothetischen diejenigen, welche die konsekutiven Eigenschaften prädicieren. — Es sei dies als ein Vorschlag hingestellt, der vielleicht den Vorzug hat, reine Bahn zu schaffen und für die Mathematik eine feste Norm aufzustellen. An die Grammatik schliesst sich dies am leichtesten an; im Wesentlichen decken sich allerdings dann auch die Begriffe kategorisch und hypothetisch mit analytisch und synthetisch. So sind dann entschieden kategorische Urteile: das Quadrat hat rechte Winkel; die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder einer arith-

metischen Reihe ist konstant; die Logarithmen sind Potenzexponenten. Hypothetisch sind dagegen: die Diagonalen im Rechteck sind gleich; im rechtwinkligen Dreiecke gilt der Pythagoras etc. [1])

Dass hypothetische Urteile in der Form eines Satzes auftreten können, hat dabei nichts Befremdliches. Die als notwendig erkannte Folge verflicht sich eben nach geschehener Einsicht also mit dem Subjekt, dass beide in untrennbarer Einheit angeschaut werden. Ebensowenig verwirrt es die Grenzen, dass den kategorischen Urteilen durch ein Auseinanderfallen und eine künstliche Auflösung des Subjektes in das genus proximum und die differentia specifica die Form des hypothetischen gegeben werden kann; z. B. wenn das Dreieck ein gleichschenkeliges ist, so sind zwei Seiten gleich. Eine solche Auflösung hat ohnehin weiter keinen Zweck, als sich das Wesen der Definition ins Gedächtnis zurückzurufen.

Was als kategorisch und was als hypothetisch gilt, würde nach dieser Auffassung aufs innigste und untrennbar von den aufgestellten Definitionen abhängen, und deshalb kann es allerdings eintreten, dass in der einen Betrachtungsweise ein hypothetisches Urteil ist, was in einer andern ein kategorisches. Definiert man die Ellipse als Schnitt eines Kegels [2]), so wird die Eigenschaft der Brennpunkte, dass die Summe der Radien eine Konstante sei, abgeleitet und ist also ein hypothetischer Satz; nimmt man diese Eigenschaft als Ausgangspunkt, so ist der Satz ein kategorischer und der andere: „die Ellipse kann aus einem Kegel geschnitten werden“, ein hypothetischer. — Unter den hypothetischen Sätzen sind aber alsdann die beiden Arten streng von einander zu unterscheiden, in denen die Ursache nur in der Vorstellung oder als wirkliche Thatsache existiert. Beide sondern sich durch den grammatischen Ausdruck von einander, die ersten gebrauchen durchgängig den Indikativ, die zweiten den Kondicionalis, die einen benutzen die konsekutiven Konjunktionen, die andern das vieldeutigere „wenn“, (vergl. unten den indirekten Beweis). —

Da demnach alle Lehrsätze dem Wesen nach unter die

[1]) Vergl. hierüber auch Luthe, Beiträge zur Logik I. pag. 39.

[2]) Jacob Steiner. Vorlesungen über synthetische Geometrie. Tl. I. s. 174.

hypothetischen Urteile gehören, ist es von grösster Wichtigkeit, um die wirkende Ursache klar hervortreten zu lassen. die Bedingung, sei sie nur eine oder sei sie eine Mehrheit von in Wechselwirkung tretenden Bestimmungen, für sich besonders abzulösen. In keiner anderen Wissenschaft stellt sich dieses Verhältnis der Kausalität so klar und ursprünglich dar, wie in der Mathematik, und dadurch wird sie gerade die Schule für ein folgerichtiges Denken. Die Kausalität ist hier unsere eigne That. — Manche pädagogischen Regeln beruhen hierauf; sie lassen sich in der einen zusammenfassen: da die causa efficiens hier das begriffliche prius, die Folge das posterius ist, so lasse man sie auch zeitlich als solches prius erscheinen. — Falsch, weil die Entwickelung hemmend, ist es daher (vorzüglich bei der ersten Durchnahme; die Repetition mag sich das erlauben, um die Hauptwahrheiten hervorzuheben), den Lehrsatz vorher zu formulieren und einzuprägen und dann den Beweis folgen zu lassen. Möglichst werde durch die Zeichnung auch als zeitlich aufeinanderfolgend kenntlich gemacht, was begrifflich früher und später ist. Enthält das Lehrbuch Zeichnungen, so sind sie deshalb beim Unterrichte nicht zu berücksichtigen, denn sie geben die Sache als eine fertige; nur durch eine Zurückversetzung in ihre Genesis — und diese gerade wird dem Anfänger nicht leicht — sind sie brauchbar. Handelt es sich z. B. um den Satz, dass das gleichschenkelige Dreieck gleiche Basiswinkel hat, so zeichne der Lehrer womöglich mit dem Zirkel das Dreieck als ein gleichschenkeliges; handelt es sich um seine Umkehrung, so werde es als ein Dreieck mit zwei gleichen Winkeln gezeichnet. Das Lehrbuch, enthält es mehr als die blosse Angabe der Lehrsätze, werde aus der Unterrichtsstunde entfernt und trete nur bei häuslichen Repetitionen ergänzend ein. —

Die einfachsten und am häufigsten wiederkehrenden Formen disjunktiver Urteile sind diejenigen, in denen der Natur der Quantität entsprechend die Distinktion durch ein kleiner, gleich, grösser gegeben wird. Trichotomieen sind also zahlreicher als Dichotomieen, z. B. die Dreiecke sind spitzwinkelige, rechtwinkelige, stumpfwinkelige. —

Der Kreis schneidet die Gerade, berührt sie, oder hat nichts mit ihr gemeinsam. —

Die Potenzlinie ist die gemeinschaftliche Sehne, oder die gemeinschaftliche innere Tangente, oder sie liegt ausserhalb beider Kreise.

Die trigonometrische Tangente spitzer Winkel ist kleiner, gleich oder grösser als Eins.

Die gemischte quadratische Gleichung hat zwei imaginäre oder zwei gleiche oder zwei reelle Wurzeln.

Die Determination der Lösung fast jeder geometrischen Aufgabe liefert Beispiele von solchen Trichotomieen. Wo Dichotomieen auftreten, z. B. bei den Arten des Parallelogramms, des Kreiskegels, da entstehen sie oft, indem zwei Arten durch das Gesetz der Sache in eine zusammengehen; spitzwinkelige Parallelogramme sind zugleich stumpfwinkelige, konvergierende Linien zugleich divergierende. Es ist nicht gleichgiltig, in welcher Reihenfolge die einzelnen Arten aufgezählt werden. Die blosse Logik reicht nicht aus, sondern eine in der Sache liegende Bestimmung, die in der Mathematik sich durch die Aufeinanderfolge der einzelnen Momente des Werdens leicht erkennen lässt, tritt hier hinzu.[1]) —

V. Das Prinzip der Identität.

(§ 9.)

Es hat dieses Prinzip eine nähere und eine fernere Bedeutung, sobald es nur aus der unfruchtbaren[2]) Form: „A ist A“ losgelöst ist.[3]) Die zunächst liegende: „es ist unmöglich, dass demselbigen dasselbe und in derselben Hinsicht zukomme und nicht zukomme“ drückt die Zuversicht aus, die allem Erkennen zu Grunde liegen muss. Wie könnte es eine Naturwissenschaft geben, wenn man nicht von vornherein voraussetzte, dass die richtig beobachteten Thatsachen auf sich gleichbleibenden Gesetzen beruhen. Es würde der Trieb fehlen, anscheinende Widersprüche bei Beobachtungen aufzuhellen. Z. B.

---

[1]) Vergl. Erläuterungen, pag. 111. „Zur Uebersicht etc. . . . . . . aus dem Wesen des Gedankens.“

[2]) Drobisch. Neue Darstellung etc., pag. 64.

[3]) Wundt, Logik I. pag. 171. „Das Subjekt nimmt den Begriff unbestimmter etc.“ —

kann die Thatsache, dass ein schwacher Magnet durch einen genäherten starken ummagnetisiert wird, zunächst Zweifel erregen, die dann zu näherer Beobachtung antreiben, da man weiss, dass die genau festgestellte Thatsache keine Lüge duldet. —

Bei indirekten Beweisen tritt die einfache Anwendung des Identitätsgesetzes stets ein und wird dort näher erörtert werden. — Ein etwas weiter gehender Gebrauch des Prinzips sei hier noch besprochen. —

„Es duldet keinen Widerspruch der Prädikate des Subjektes mit dem Subjekte". Die allernächsten Prädikate sind aber diejenigen, welche in der vollständigen Definition auftreten, d. h. die konstitutiven Merkmale; das Subjekt ist mit diesen identisch, und die Gesamtheit der specifischen Merkmale, insofern sie die zur Basis dienende nächst höhere Art vollständig kennzeichnen, heben den Begriff aus anderen nächstverwandten heraus. Auf diese Identität stützen sich eine Menge Beweise, vorerst diejenigen, welche zeigen, dass dasselbe geometrische Gebilde verschiedene Entstehungsarten haben kann. Der gerade Kreiskegel wird zunächst etwa genetisch definiert als der durch die Bewegung einer Geraden, deren einer Endpunkt fest bleibt, während sie unausgesetzt sich an der Peripherie eines Kreises bewegt, dessen Mittelpunkt senkrecht unter dem festen Punkte sich befinde, begrenzte Raum. Es ist für weitere Entwickelungen weitläufig immer wieder auf diese erste Auffassung zurückzugehen, und bessere Dienste leistet dann die Entstehung des geraden Kegels durch Rotation eines rechtwinkeligen Dreiecks um eine seiner Katheten. —

Das Parallelogramm gemäss der Definition als Viereck mit parallelen Gegenseiten zu konstruieren, ist zeitraubend, wenn nur die Ausführung der Euklidischen Postulate, Ziehen von geraden Linien und Beschreiben von Kreisen als sichere Konstruktionen zugelassen werden, die Zeichnung von Parallelen vermittelst eines sich am Lineal verschiebenden Winkels ausgeschlossen wird. Das Viereck aber, dessen Gegenseiten gleich sind, lässt sich als ein mit dem Parallelogramme identisches Gebilde nachweisen, ist aber seinem Entstehungsgrunde nach zur Zeichnung praktischer und tritt demgemäss dafür ein. —

Die Ellipse — ein schon oben angeführtes Beispiel möge in

anderer Fassung wiederholt werden — wird definiert[1]) zunächst von den beiden Brennpunkten aus durch das Gesetz der konstanten Summe. Später wird gezeigt,[2]) dass diese Kurve die Eigenschaft habe, dass die Abstände jedes auf ihr befindlichen Punktes von einem Brennpunkte und einer bestimmten Geraden in konstantem Verhältnisse stehen. Ist dann die Konversion (vergl. unten) dieses Satzes möglich, so ist das Gebilde, welches nach dieser letzteren Eigenschaft konstruiert wird, eine Ellipse nnd beide Entstehungsarten liefern ein identisches Ergebnis. Zu vergleichen hiermit ist der schöpferische Satz, dass Kegelschnitte sowohl als Kurven zweiter Klasse als anch als Knrven zweiter Ordnung aufgefasst werden können, als Erzengnis zweier projektivischer Strahlenbüschel oder zweier projektivischer Punktreihen.[3]) —

Definiert man die trigonometrische Tangente eines Winkels zunächst als Quotient des projicierenden Lotes durch die Projektion, so erscheint die Gleichnng $\tang \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ als ein abgeleitetes Merkmal; da es aber möglich ist, ans diesem abgeleiteten Merkmal stets wieder auf das konstitutive zurückzukommen, so kann die Tangente, wie es ja in goniometrischen Umformnngen fortwährend geschieht, als Quotient des Sinns durch den Kosinus aufgefasst werden. —

Es seien der Beispiele genng. Sie werden zugleich dargelegt haben, wie sich das Identitätsgesetz „zur notwendigen Übereinstimmung der Folgen mit dem Begriffe als dem Grunde erweitern lässt“.[4]) Denn in strengen Beweisen zeigt die Ableitung, dass Grund und Folge nichts sind, als verschiedene Phasen desselben Prozesses, die weder im Realen noch im Denken sich von einander trennen lassen.

Die Snbsumption einzelner Probleme unter bestimmte Auflösnngsmethoden beruht ebenfalls auf dem Prinzipe der Identität. Jedoch ist dann Vorsicht nötig. Soll z. B. eine gegebene, aus dem Gebiete des wirklichen Lebens genommene Frage beantwortet werden, nnd erweist sich als Mittel dazu die Lösung einer quadratischen Glei-

[1]) Jacob Steiner. Vorlesungen. I. pag. 33.

[2]) a. a O. pag. 60.

[3]) Vergl. J. Steiner. Vorlesungen. II. pag. 98.

[4]) Erläuterungen. pag. 19.

chung, so ist nicht unter allen Umständen die Lösung der Gleichung mit der Beantwortung der Frage identisch. Die Natur der Aufgabe kann als solche zunächst z. B. Imaginäres und vielleicht auch Negatives ausschliessen.[1] Ähnliches tritt ein und muss eintreten, wo die Algebra zur Lösung geometrischer Aufgaben angewendet wird. Das geometrische Gebilde kann, aber es muss nicht stets ein entsprechendes Gegenbild in dem Gebiete der Zahlen haben. Jedoch hat die Einführung des Imaginären in die Geometrie auch hier weitere Gesichtspunkte eröffnet.

Auf der Identität der Folge mit dem Entstehungsgrunde beruht die ganze Lehre von der Kongruenz, dieser eigentümlichen Doppelsetzung desselben Gebildes. Am klarsten ist dies ersichtlich in den beiden ursprünglichsten Lehrsätzen, welche die Kongruenz der Dreiecke aus Übereinstimmung zweier Seiten und des Zwischenwinkels oder zweier Winkel und der Zwischenseite beweisen (die beiden anderen sind in den gebräuchlichsten Darstellungen der Elementargeometrie auf diese basiert). Zwei Seiten und der Zwischenwinkel, einmal gewählt, genügen, um das Dreieck zu bestimmen; sie sind die Gründe, das Dreieck seiner Grösse und seiner Form nach die notwendige Folge; der Kongruenzbeweis in seine Momente aufgelöst, ist nichts anderes, als der Nachweis, dass dieselben Entstehungsgründe dasselbe Gebilde mit Notwendigkeit hervorbringen.[2] Es ist daher wesentlich dasselbe, ob diese Sätze als Bestimmungssätze oder als Kongruenzsätze aufgefasst werden; was mit Notwendigkeit bestimmt, bewirkt, öfters angewandt, immer dasselbe. Das Prinzip der Identität wird hier zu einem metaphysischen, und es wird unmöglich sein, bei der Betrachtung der hier einschlagenden Beispiele die Verhältnisse der

[1]) Vergl. Heis: Aufgaben § 71. 38.
Die Gleichungen $(x - 3)(y + 2) = 336$.
$xy = 336$, die zur Beantwortung der Frage führen, geben mehr, da sie ja eigentlich die weitere Aufgabe lösen, die (positiven und negativen) Zahlen zu finden, welche diesen Gleichungen genügen; oder vergl. in Schellbach: „Neue Elemente der Mechanik" die Aufgabe in § 20.

[2]) Vergl. Fresenius: die psychologischen Grundlagen der Raumwissenschaft (Wiesbaden 1868) pag. 76. „Als psychologische Erzeugnisse zeigen sie — die kongruenten Figuren — sich tautologisch."

Gründe zu ihren Folgen im Realen unberücksichtigt zu lassen.[1]) Es ist von hier aus dann ein natürlicher Übergang zur nun folgenden Besprechung.

VI. Die Konversion der Urteile.

(§ 14.)

Es handelt sich um die Frage, in welchen Fällen haben wir das Recht, Subjekt und Prädikat und in weiterer Entwickelung Grund und Folge als dergestalt eines zu setzen, dass wir sie wohl in der reflektierenden Vorstellung, nicht aber der Sache nach von einander trennen können, dass wir in freiem Spiele der Gedanken den Anfangspunkt beliebig nehmend sicher sind, das als Ende wieder zu finden, was zuerst Anfang war?

Es kann zunächst, wird anders die oben gegebene Distinktion von kategorischen und hypothetischen Urteilen acceptiert, leicht entschieden werden, ob kategorische Urteile umkehrbar sind. Wenn sie eben nur die einzelnen Teile der Definition enthalten, so ist in ihnen das Prädikat stets weiter als das Subjekt, es haftet diesem nicht nur an, sondern wird auch anderen inhärieren.[2]) Eine Umkehrung ist daher nicht möglich.

Jedes Parallelogramm ist ein Viereck, ist z. B. ein solches Urteil; es giebt nur die unvollständige Definition, die specifische Differenz fehlt, das Urteil kann nicht konvertiert werden. —

Wie ist es aber mit den Urteilen, welche als hypothetische bezeichnet wurden? — In welchen Fällen kann hier die Ursache mit der Wirkung so als untrennbar verschmolzen betrachtet werden, dass wir berechtigt sind, die Zwischenglieder des Beweises unterdrückend, in rascher Übersicht beide Begriffe, den des bestimmenden Subjektes und des gefolgerten Prädikates, als stets vereint zu denken? — Bei weitem die meisten Sätze der elementaren Geometrie sind umkehrbar; es ist fast schwieriger, unter ihnen Theoreme zu finden, die nicht

[1]) Vergl. logische Untersuchungen. II. pag. 186 u. II. pag. 210, „in dem Notwendigen, welches seinem Begriffe nach das Unwandelbare ist, stellt sich das Identische dar etc.“

[2]) Vergl. Elementa logices. § 14.

konvertiert werden können, als solche, bei denen die Konversion möglich ist; eine Erscheinung, die sich so allgemein zeigt, dass z. B. J. Steiner in seinen geometrischen Konstruktionen ohne weiteres die Konversion bezeichnet ohne einen Beweis zu geben.[1]) Soll dies etwa eine Flüchtigkeit der Behandlungsweise sein? — Andererseits ist es fast ermüdend, die Konversion der Lehrsätze in der elementaren Geometrie immer und immer wieder von neuem zu beweisen. Der Satz z. B., dass im gleichschenkeligen Dreieck die Winkelhalbierende durch die Spitze die Basis halbiert und mit ihr rechte Winkel bildet, hat mindestens fünf Umkehrungen: — ist es notwendig, jede einzelne wieder zu begründen? —

Es kommt darauf an, das Kennzeichen der Konvertierbarkeit: ubi res rei ita adhaeret, ut soli sit propria neque cum aliis quidquam commune habeat[2]), oder um die bildliche Darstellung Christian Weise's zu gebrauchen, die Fälle, wo der den Umfang des Prädikats anzeigende Kreis den den Umfang des Subjekts darstellenden deckt, zu bestimmen.[3]) In der That giebt es aber allgemeine Gesichtspunkte. —

Fruchtbar vor Allem und sehr oft in der elementaren Mathematik angewendet ist das Prinzip, das Drobisch im Anhange seiner Logik[4]) unter dem Namen des Hauberschen Satzes anwendet, obschon

---

[1]) J. Steiner. Die geometrischen Konstruktionen etc. pag. 8, „wenn von vier harmonischen Strahlen einer mit zwei sich zugeordneten gleiche Winkel bildet, so findet dasselbe auch mit seinem zugeordneten Strahle statt, und beide stehen zu einander rechtwinkelig und umgekehrt: stehen zwei zugeordnete Strahlen zu einander rechtwinkelig, so hälften sie die von den zwei übrigen Strahlen eingeschlossenen Winkel und umgekehrt Ebenso pag. 35 und 46.

[2]) Elementa logices a. a. O. Vergl. Logische Untersuchungen II. pag. 333, ebenso pag. 403 u. f.

[3]) Vergl. Lange, logische Studien. pag. 63.

[4]) pag. 284 u. f. Wenn einem Subjekt S entweder a oder b oder c, desgleichen einem Subjekt Σ entweder α oder β oder γ als Prädikat zukommt und es überdies bekannt ist, dass

1) wenn S . . . a immer auch Σ . . . α,
2) wenn S . . . b immer auch Σ . . . β,
3) wenn S . . . c immer auch Σ . . . γ,

er selbst auf indirekten Schlüssen beruht.[1]) In seiner einfachsten Form lässt es sich leicht klar machen und dann gebrauchen. Einige Übung wird die Ermüdung vieler besonderer Beweise vermeiden lassen und die Zeit, die auf ausführliche direkte Beweise von Konversionen verwandt wird, einbringen.

Nehmen wir als Beispiel die durchgreifende und zu Lösungen zahlreicher Konstruktionsaufgaben dienende Eigenschaft des Kreises, dass er der Ort der Punkte ist, unter denen eine Linie unter konstantem Winkel erscheint, oder der Ort der Spitzen aller Dreiecke, die denselben Winkel an der Spitze und dieselbe Grundlinie haben.

Folgende Sätze stehen fest und haben direkte Beweise:

1) Liegen die Spitzen der Dreiecke, die gemeinsame Grundlinie haben, auf der Peripherie eines Kreises, der diese Grundlinie als Sehne fasst, so sind die Winkel an der Spitze gleich;
2) rückt die Spitze ausserhalb des Kreises, so wird der Winkel kleiner;
3) liegt sie innerhalb, so ist der Winkel grösser.

Die Einsicht in diese einfache Trichotomie ergiebt dann das „nur“ und mit ihm die Umkehrbarkeit. Die Begriffe: auf dem Kreise und gleiche Winkel, innerhalb und grössere Winkel, ausserhalb und kleinere Winkel, gehören eben zusammen. Hierher gehören die Lehrsätze, dass gleiche Kreissehnen gleiche Abstände vom Centrum haben, die kleinere Sehne einen grösseren Abstand fordert; dass Punkte, die weiter vom Centrum abstehen, als der Radius lang ist, ausserhalb des Kreises liegen etc. Es ist eine unnütze Breite und trübt den Blick für die Hauptsache, alle Konversionen als Hauptsätze hervorzuheben. Die Umkehrungen z. B. des Satzes von der Winkelhalbierenden im gleichschenkeligen Dreiecke lassen sich abkürzen, wenn man den Verlauf einer aus der Spitze gezogenen Transversale cc wie nachstehend verfolgt:

---

so ist auch umgekehrt

4) wenn $\Sigma \ldots \alpha$ immer auch S . . . a,
5) wenn $\Sigma \ldots \beta$ immer auch S . . . b,
6) wenn $\Sigma \ldots \gamma$ immer auch S . . . c.

[1]) Vergl. oben I. die Qualität des Urteils.

1) Ist $\sphericalangle$ acd $>$ $\sphericalangle$ bcd, so ist adc $<$ R und ad $>$ bd.

2) Ist $\sphericalangle$ acd $=$ $\sphericalangle$ bcd, so ist cd $\perp$ ab und ad $=$ bd.

3) Ist $\sphericalangle$ acd $<$ $\sphericalangle$ bcd, so ist adc $<$ R und ad $<$ bd.

Dann sind durch den Hauberschen Satz zwei Umkehrungen erledigt und die Übersicht über das Ganze gesichert.

Die Anwendung dieser Schlussweise wird bei dem Abschnitte über das τεκμήριον nochmals vorkommen.

Zu drei Punkten, die in bestimmter Weise einander zugeordnet sind, kann ein vierter harmonischer vollkommen bestimmt werden; und dass dann „nur ein“ solcher möglich ist, folgt ebenso aus der Konstruktion, wie dass zwei Gerade nur einen Schnittpunkt haben. In dieser Betrachtung, sowie in der analogen für harmonische Strahlen, liegt der Grund, warum in den oben angeführten Beispielen Steiner ohne weiteres seine fundamentalen Sätze konvertiert und z. B. in der Darlegung der Grundbeziehungen zwischen Pol und Polare am Kreise[1]) nicht den Satz, wie er ihn giebt, dass der Ort der vierten harmonischen Punkte eine Gerade sei, beweist, sondern zeigt, dass eine bestimmte unveränderte Gerade auf den Sekanten die vierten harmonischen Punkte bestimme. —

Das Ausschliessliche, welches die Konversion ermöglicht, wird weiter ersichtlich sein, wenn alle Voraussetzungen des Vordersatzes, alle zu Grunde gelegten Eigenschaften des Subjektes zu ihrer Geltung kommen, gleichsam vollständig ausgenützt werden,[2]) denn dann wird sich ihre Gesamtheit als identisch mit dem Abgeleiteten erweisen. Wenn in einem Strombette kein Tropfen Wasser verloren ginge, und keiner hinzukäme, so müsste ja durch einen unteren Querschnitt soviel Wasser hindurchpassieren, wie durch einen oberen. —

Erläutern wir dies durch den Satz, dass im Parallelogramme die Diagonalen einander halbieren. Die Konstitutive ist der Parallelismus der Gegenseiten; dieser bewirkt, in Vollständigkeit gebraucht

[1]) Die geometrischen Konstruktionen, pag. 29 bis 31.

[2]) Logische Untersuchungen, II. pag. 402: „Was aus dem Allgemeinen und ausschliesslich Specifischen folgt, kann nur dem Dinge, dessen Begriff zu Grunde liegt, und keinem anderen, zukommen. — In dem bezeichneten Falle ist es überflüssig, für die Umkehrung des Satzes noch erst einen Beweis zu suchen.“

zunächst die Gleichheit derselben schon durch Zuziehung einer Diagonale, so dass die Begriffe Parallelogramm und Viereck mit gleichen Gegenseiten identisch werden. Diese Gleichheit nun von neuem mit dem Parallelismus unter Anwendung auch der zweiten Diagonale verbunden, liefert durch eine Kongruenz die Folgerung. Es ist nichts von dem übergangen, was den Begriff konstituierte; der Satz wird sich umkehren lassen müssen. —

Gehen aber nicht alle Eigenschaften des Subjektes in den Beweis ein, so wird eine Umkehrung im allgemeinen nicht notwendig stattfinden. Der Satz, dass die zweiten Differenzen einer Reihe von Quadraten, deren Grundzahlen äquidistant sind, konstant bleiben, lässt sich leicht zeigen:

$$\begin{array}{ccccccc} a^2 & & (a+d)^2 & & (a+2d)^2 & & (a+3d)^2 \text{ etc.} \\ & 2ad+d^2 & & 2ad+3d^2 & & 2ad+5d^2 \text{ etc.} & \\ & & 2d^2 & & 2d^2 \text{ etc.} & & \end{array}$$

Die Umkehrung ist aber nicht richtig; denn die Glieder, welche durch das Abziehen verloren gehen, sind gerade die, deren Zusammenhang konstituiert, dass sich die Glieder der ersten Reihe als Quadrate erweisen.

Wollte man rückwärts operieren:

$$\begin{array}{ccccccc} & & q & & q & & \\ & p & & p+q & & p+2q & \\ r & & r+p & & r+2p+q & & r+3p+3q \end{array}$$

so würde die letzte Reihe nur jene besondere Forderung erfüllen, wenn die verloren gegangene Bedingung etwa in der Form:

$$p = 2\sqrt{\frac{rq}{2}} + \frac{q}{2}$$

wieder in ihre Rechte eingesetzt werden würde. Ohne diese Bedingung giebt die Umkehrung ein allgemeineres Resultat.

Dergleichen Beispiele der Unmöglichkeit, einen Satz zu konvertieren, begegnen uns demnach, wenn wir nicht beachten, dass sich das grundlegende Allgemeine in einen besonderen Fall verbirgt, und daher in Versuchung kommen, das Besondere für die Ursache zu halten.

Um jedes rechtwinkelige Parallelogramm lässt sich ein Kreis beschreiben, aber nicht jedes Sehnenviereck ist ein rechtwinkeliges

Parallelogramm; denn der Grund für die Möglichkeit des umschriebenen Kreises lag darin, dass das rechtwinkelige Parallelogramm eins von den unzähligen Vierecken ist, in denen die Summe der Gegenwinkel zwei Rechte beträgt. In der Umkehrung kann also jener einzelne Fall wohl wieder erscheinen, aber er muss nicht die Folge sein.

Halbiert man in einem Dreiecke den einen Winkel und seinen Nebenwinkel, so erscheinen auf der Gegenseite vier harmonische Punkte, nicht aber umgekehrt. Der Grund ist derselbe, wie bei dem obigen einfachen Beispiele: die vier Strahlen, die durch die Halbierung eines Winkels und seines Nebenwinkels erhalten werden, sind nur ein besonderer Fall unter unendlich vielen; der Kreis, der den Umfang des Subjektes bezeichnet, ist gleichsam auf einen Punkt reduziert. — Nicht nur in der Voraussetzung, sondern auch in den im Beweise gebrauchten Hilfssätzen darf sich ein Besonderes nicht als ein Allgemeines geltend machen. — Man könnte z. B. direkt schliessen: „in einem Paralleltrapez beträgt die Summe der Winkel vier Rechte" und den Beweis wie folgt liefern: (a b c d sei die Figur, a b parallel d c) die Summe der Winkel b und c beträgt zwei Rechte als die Summe zweier entgegengesetzter Winkel bei Parallelen, ebenso die der Winkel d und a; die Addition giebt vier Rechte. Eins wäre aber übersehen, dass nämlich nur ein Fall der Konstituierung der Zahl 4 hier benutzt worden, der Fall $2 + 2 = 4$.

Geht der Schulunterricht auf projektivische Eigenschaften des Kreises ein, so wird sich nicht selten die Gelegenheit bieten, diese Erscheinung näher zu besprechen. Der Schüler wird versucht sein, z. B. den Pascal'schen Satz zu konvertieren, und es wird darauf aufmerksam gemacht werden müssen, dass der Satz nicht gilt, weil der Kreis ein Kreis, sondern weil der Kreis ein Kegelschnitt ist. —

VII. Die Stufen der Erkenntnis.

(§ 15—20.)

Es konnte oben (III.) die Modalität der Urteile nicht besprochen werden, ohne darauf bereits hinzuweisen, wie sich in den einzelnen Formen ein Fortschritt vom assertorischen Urteil zum apodiktischen zeigt, und somit ihnen die verschiedenen Stufen der Erkenntnis ent-

sprechen. Hier wird es darauf ankommen, auf einzelne bereits dort angedeutete Beispiele näher einzugehen. Nehmen wir, da sich der Sache nach Beispiele aus dem elementaren Unterrichte, wenn die propädeutische Anschauungslehre nicht benutzt wird, nicht gut eignen, den Unterricht in der Physik mit zu Hülfe, und es wird am leichtesten sein, das hierher Gehörige durch Beispiele aus den Teilen der Physik zu erörtern, deren wissenschaftliche Behandlung bereits eine solche Durchsichtigkeit gewonnen hat, dass ihre mathematische Begründung den Schülern zugänglich gemacht werden kann. Die Lehre vom freien Falle der Körper eignet sich hierzu ganz vorzüglich, wie überhaupt einiges aus der Mechanik.

Die Betrachtung einzelner dem täglichen Leben entnommenen Thatsachen legt uns die Frage „εἰ ἔστι“ nahe. Ein Steinchen, von geringer Höhe herabfallend, schadet dem nichts, auf den es fällt, während dasselbe, wenn es die Tiefe eines Schachtes durcheilt, das Leben des Bergmanns bedroht. Die Beantwortung dieser Frage, die grössere Höhe gab eine grössere Geschwindigkeit, ist eine vorläufige; das ὅτι, die Thatsache, steht fest. Zunächst schreitet dann die weitere Erkenntnis zu einer genaueren Erforschung dieser Thatsache vor, und hier ist dann die Stelle, wo in der Physik das den Vorgang isolierende, insbesondere das messende Experiment in seine Bedeutung eintritt. Die Atwood'sche Fallmaschine lehrt die Hauptgesetze, dass sich die zurückgelegten Räume wie die Quadrate der Fallzeiten, die erlangten Geschwindigkeiten wie die Fallzeiten verhalten, und hierdurch wird allerdings eine gewisse Kenntnis des τί ἐστιν gewonnen, die aber selbst das Gebiet des Thatsächlichen nicht verlässt und somit das Wesen nicht vollständig durchschaut. Denn es ist die Natur des Experimentes und der aus ihm abgeleiteten Folgerungen, ein Einzelnes zu bleiben. Wir sehen, aber ob wir immer dasselbe sehen, ist eine Frage, die gestellt werden kann; es bleibt unerörtert, dass die einzelnen Gesetze notwendig sind, ebenso auch ihr gegenseitiger Zusammenhang unbegriffen. — Wenn das Experiment eine befriedigende Antwort erteilt, so erteilt es sie nicht, insofern es Experiment ist, sondern weil der vorausschauende Verstand bereits in dem Einzelnen das Allgemeine erfasst.

Die wahre Befriedigung stammt aus der Erforschung des διότι,

das in dem vorliegenden Beispiele approximativ gegeben werden kann.[1]) Die Bewegung, die ein Atom, das von einem in derselben Entfernung bleibenden Atome angezogen wird, annimmt, lässt sich mathematisch darstellen, und durch diese Darstellung, die aus einem einfachen Grunde die Erscheinungen und ihre Gesetze ableitet, erhalten dann rückwärts die vorangegangenen Stufen neue Aufschlüsse; das τί ἐστιν ist nun insbesondere nicht mehr ein äusserlich Aufgenommenes, wie beim Experiment, sondern ein innerlich Begriffenes.

Ganz analoge Betrachtungen werden sich bei der Schwungkraft anstellen lassen. Der vom Mühlenrade sich loslösende Tropfen, der geschleuderte Stein u. s. w. lassen uns die Thatsache wahrnehmen, und der Centrifugalapparat lehrt uns einstweilen schon genauer, wie diese Kraft zunimmt mit dem Radius der Bahn, mit der Schnelligkeit der Bewegung, mit dem Gewicht des rotierenden Körpers, ohne aber gewissere und vollständigere Antwort auch nur auf das τί ἐστιν zu geben. Eine mathematische Ableitung der Formel $c = \frac{v^2}{r}$, sich gründend auf das an sich einfache Parallelogramm der Kräfte, beantwortet zunächst das διότι, giebt damit aber genügendere Antwort auf die Frage nach Wesen und Gesetz.

Eins bleibt allerdings auch hier unerörtert und man verlange nicht mehr von der Mathematik, als was sie leisten kann. — Was der Physiker, wenn er Probleme der Mechanik mit mathematischer Schärfe löst, Kraft nennt, ist die in der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit, eine Grösse, die verständlich genug ist, deren Verständnis aber tiefer gehende Fragen nach den letzten Gründen nicht beantworten kann. Die letzte Ursache wird mit diesem gemachten Begriffe nicht erkannt. —

Die Beispiele liessen sich mehren. Überall da, wo mathematische Behandlung die Thatsachen begründen und aufhellen kann, wird der physikalische Unterricht Belege darbieten. Ausser der Mechanik sind es einzelne Kapitel der Akustik und Optik, wo eine Deduktion möglich wird; in der Elektrizitätslehre muss der Unterricht

[1]) Vergl. z. B. die erschöpfende Darstellung in Schellbach: Neue Elemente der Mechanik. pag. 5—18.

meistens auf dem niedrigen Standpunkte der Erläuterung des ὅτι stehen bleiben und kann sich höchstens nur da vertiefen, wo der Zusammenhang komplizierterer Thatsachen mit einfacheren dargelegt wird, z. B. in der Elektrodynamik. —

Die Geschichte der Astronomie endlich ist ein so geläufiges Beispiel im Grossen, dass an dieser Stelle nur daran erinnert werden mag. Männer, wie Kepler und Newton, repräsentieren hier die Epochen der sich entwickelnden Erkenntnis. —

Ist eine Erscheinung aus ihren Gründen erkannt und abgeleitet, so bedarf es nicht mehr des darlegenden Experimentes, dem hiermit weder sein wissenschaftlicher, noch, worauf es hier ankommt, sein pädagogischer Wert abgesprochen werden soll. Da unser Erkennen sich überall in der Stufenfolge des sinnlichen Wahrnehmens, der Auffassung des Gemeinbildes und der Begriffsbildung vollzieht, wir aber zunächst „mitten in die erscheinende Welt eingetaucht sind“, so tritt das ὅτι eher und näher an uns heran und hat die grössere Frische, das sinnlich Kräftigere für sich.

Es ist von Wichtigkeit, dass durch die Wirkung der Thatsache der Sporn des θαυμάζειν für die Vertiefung der Erkenntnis stets geschärft werde; diese Macht liegt aber für das jugendliche Alter in der sinnlichen Wahrnehmung und der Befruchtung der schaffenden und weiter führenden Phantasie. Deshalb gehe das Experiment in der ersten Zeit des physikalischen Unterrichts stets voran und reize dazu, weil es eben nicht alles beantworten kann, eingehender und aus tieferen Gründen die Phänomene zu verstehen. —

Durch eine Unterscheidung der Thatsache von dem hervorbringenden Grunde wird sich auch vermittelst der angeführten Beispiele die Einsicht in das πρότερον πρὸς ἡμᾶς einerseits und das πρότερον τῇ φύσει andererseits ergeben. Das der Natur nach Frühere ist der Grund der als letzter Abschluss eines Vorgangs in die Erscheinung tretenden Thatsache; weil die Ableitung ein Gesetz als Facit liefert, muss das Experiment es bestätigen. Die sphärische Astronomie ist die Astronomie der Thatsache, das kopernikanische Weltsystem, durch Kepler vertieft und durch die einfachsten Annahmen von Newton begründet, ist ihr gegenüber das πρότερον τῇ φύσει; in einem andern Gebiete die Beobachtung der magnetischen Deklina-

tion etc. ein πρότερον πρὸς ἡμᾶς, die Gauss'sche Theorie das πρότερον τῇ φύσει.

In den beschreibenden Naturwissenschaften liegt das πρότερον τῇ φύσει noch ferner. Wir beobachten die eigentümlichen Übereinstimmungen der Anzahl und Stellungen der Kelchblätter, Blumenblätter und Staubgefässe z. B. in der fünften und zwölften Klasse des Linné'schen Systems; aber erst durch die Goethe'schen Forschungen und durch die Gesetze der Blattstellung zeigt sich ein Weg, näher in diese Formengesetze vorzudringen. —

Hiernach differenziert sich zunächst die Erkenntnis als eine durch Induktion oder durch Syllogismus, einzelnes zum allgemeinen sammelnd oder aus allgemeinem einzelnes ableitend.

VIII. Der Syllogismus.

(§ 21—33.)

Im Folgenden möge die grössere Anzahl von Abschnitten, die sämtlich vom Syllogismus handeln, zusammengefasst werden. Dabei bin ich davon entfernt zu meinen, dass die Bedeutung der Namen der Schlussfiguren von barbara bis ferison, wie kraus sie auch klingen mögen, wenigstens der häufigsten unter ihnen, den Schülern unbekannt bleiben sollten, noch dass der Unterschied des Gesichtspunktes, nach denen Aristoteles drei, die Neueren vier Hauptfiguren aufstellten, nicht erklärt werden sollte. Der Zweck dieser Blätter ist aber der, Anwendungen aus dem Unterrichte zu geben, und dafür wird ein Eingehen auf diese Unterscheidungen nur ein dürftiges Resultat liefern, sollen nicht Schlüsse erdacht werden, wie sie weder dem Lehrer noch den Schülern je vorkommen. Man sehe z. B. die sorgfältig bis in seine letzten Verkettungen durchgeführte Zergliederung des Satzes „Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind flächengleich“ bei Drobisch[1]: Alle Schlüsse (3, 6, 1, 8, 2a, 11, 14, 5, 17, 19, 18a, 22, 25, 27b, 28, 26, 33a, 2c) fallen unter den modus barbara. —

Jeder direkte Beweis würde Ähnliches zeigen. — Der Grund

[1]) Neue Darstellung, pag. 227.

liegt darin, dass die Mathematik vor allem bejahende und allgemeine Urteile sucht und wo sie verneint, diese Kraft der Verneinung aus einer gegenüberstehenden Bejahung schöpft. —

Es empfiehlt sich aber für den Unterricht auf zweierlei zu achten, das die mathematischen Beispiele bei der Betrachtung des Syllogismus darbieten.

Der Irrtum, durch welchen Locke gegen alle apriorische Erkenntnis eingenommen wurde, dass der Syllogismus nämlich nicht geeignet sei, Neues zu finden, sondern höchstens gefundene Wahrheiten zu lehren, wird genährt durch schlechte und abgenutzte Beispiele, z. B., wenn man beweist, dass Cajus stirbt oder die Belladonna schädlich sei. Wozu das? Denn wenn es auch für den Obersatz des ersteren Schlusses einen Grund giebt, der für viele nicht aus der Induktion stammt, so ist ein solches Beispiel wie das von der Belladonna gewiss ein gemachtes und unnötiges. — Dem gegenüber werden sich aber in der Mathematik vor allen andern Disziplinen Beispiele finden, die den Syllogismus als den Schild erkennen lassen, mit dem die Schöpfungen der Synthesis und Analysis sich alsbald vor Angriffen schützen, als die Schranken der Bahn, die der Gang der Forschung einhalten muss, wenn sie ans Ziel kommen soll.

Andererseits werde das Verhältnis von Grund und Folge, das sich in den syllogistischen Folgerungen fortwährend erkennen lässt, stets betont. Die hypothetischen Syllogismen lassen sich den kategorischen leicht beiordnen. Das Allgemeine ist nicht ein abstraktes und totes in der Mathematik, sondern ein schaffendes.

Bei der Gliederung dieses Abschnittes genügt vollkommen die einfache, in den logischen Untersuchungen gekennzeichnete Darlegung,[1] welche die Schlüsse des Inhalts von denen des Umfangs sondert.

So sind Beispiele des modus barbara:

1) Im Parallelogramm (M) halbieren die Diagonalen einander (P). Der Rhombus (S) ist ein Parallelogramm (M). Im Rhombus halbieren die Diagonalen einander.

[1]) pag. 348: „Wenn der Inhalt (das positive oder negative Gesetz) eines Begriffs auf dessen Umfang angewandt wird, so entsteht der kategorische Syllogismus. Der Inhalt (terminus major) eines Begriffs (Medius) beherrscht dessen Umfang (die Arten, terminus minor).

2) Viereeke mit snpplementären Gegenwinkeln (M) sind Sehnenviereeke (P). Das gleichsehenkelige Trapez (S) hat supplementäre Gegenwinkel (M). Also ist es ein Sehnenviereck.

3) Der Inhalt des Prismas (M) wird durch gh gemessen (P). Der Cylinder (S) kann als ein Prisma (M) angesehen werden. Also gilt für ihn diese Formel.

Es sind bekannte Lehrsätze, aus denen ohne besondere Auswahl diese Beispiele entnommen sind. Das erste Beispiel giebt einen Grund davon an, weshalb im Rhombus (oder Quadrat) die Diagonalen senkrecht auf einander stehen und die Winkel halbieren, die beiden anderen sind die letzten Syllogismen bekannter Beweise, und ihre Schlusssätze geben das Facit selbst. Es geht aber aus ihrer Betrachtung hervor, dass ein Syllogismus, wenn er etwas anderes ergeben soll, als die Erkenntnis des allgemeinen Gesetzes für einen speziellen Fall, für sich allein nicht genügt. Es muss eine Verkettung von mindestens zwei Syllogismen stattfinden, wenn die Sache weiter gefördert werden soll; in 2) und 3) liegt z. B. der Hauptnerv in der Sicherheit, mit welcher die Wahrheit des Untersatzes verbürgt wird, in 1) wird das schliesslich Fördernde die Eigenschaft des Rhombus, gleiche Seiten zu haben, sein, da es die Kongruenz zweier anliegender Dreiecke sichert. Somit weist der Syllogismus über sich hinaus. Wer gehen kann und mit Sicherheit die einzelnen Schritte macht, kommt deswegen nicht stets an erwünschte Ziele. —

Schlüsse, die zu negativen Ergebnissen führen, sei es nun, dass sie noch der ersten oder der zweiten aristotelischen Figur angehören, begegnen uns viel seltener. Sie werden hauptsächlich ausser in indirekten Beweisen noch da anzutreffen sein, wo bei Analysen (vergl. unten) falsche, nicht zum Ziele führende Wege vermieden werden sollen.

1) z. B. Die geometrische steigende Reihe von unendlicher Gliederzahl lässt sich nicht summieren. 2, 4, 8, 16 . . . . ist eine solche Reihe. Also lässt sie sich nicht summieren.

2) Jedes Sehnenviereck hat supplementäre Gegenwinkel. Das schiefwinkelige Parallelogramm hat nicht supplementäre Gegenwinkel. Also ist es kein Sehnenviereck.

3) Schnitten die Diagonalen des vollständigen Vierseits sich nicht

harmonisch, so würden drei in bestimmter Zuordnung genommene Punkte zwei vierte harmonische haben. Dies ist nicht möglich. Also schneiden sich die Diagonalen harmonisch. Übrigens wird ja bekanntlich selten in der Mathematik mit vollständigen Syllogismen bewiesen. Abkürzungen, die meistens in der Unterdrückung der Obersätze bestehen, insbesondere wenn dieselben die bekanntesten Axiome oder geläufige Lehrsätze sind, treten ein (Enthymeme im Sinne der Neueren), und nur dann wird ein vollständiger Syllogismus wieder angewandt, wenn etwa ein neues Prinzip als Obersatz auftritt, z. B. das in die Metaphysik hineinreichende Axiom, dass Grössen, die sich stets zwischen denselben Grenzen, die beliebig genähert werden können, befinden, gleich sind, oder in der Stereometrie das Cavalerische Prinzip u. dergl. — Wie lang würde sonst ein Beweis werden, wenn alle Syllogismen ausgeführt würden? —

IX. Die Induktion.

(§ 34—46)

Die Bewegung des Gedankens vom Umfange zum Inhalte ist in der Mathematik seltener. Der Grund davon liegt in der Natur der Wissenschaft, die entwickelt, nicht beobachtet. Jede Entwickelung steigt aber vom Allgemeinen ins Einzelne herab und verfolgt die Ergebnisse bis in die letzten Verzweigungen. — Die Aufstellung allgemeiner Gesetze wird sich also dort zeigen, wo eine Regel, ein Gesetz zunächst an einem Einzelnen gefunden wurde, wo alsdann der Subjektsumfang sich erweitert, und das gefundene Prädikat auf dies erweiterte Subjekt übertragen wird, indem es darauf ankommt, die zunächst das Einzelne als solches bestimmende Schranke hinwegzuschaffen.

Die bekannte Formel: $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ gilt zunächst für den Fall, dass $\alpha + \beta < 90^0$ sei. Dann wird bewiesen, dass andere Fälle ihre Geltung nicht aufheben; also gilt sie allgemein. — So ist es auch mit dem oft als Beispiel angeführten disjunktiven Schlusse, der die Gleichheit der Peripheriewinkel, die auf demselben Bogen stehen, zeigt. Für den Fall, dass der Mittelpunkt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt, ist der Satz

eine unmittelbare Anwendung des Satzes vom Aussenwinkel an der Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks. Der disjunktive Obersatz zeigt dann noch zwei Fälle, in denen diese Schranke wegfällt. —

Je weiter die Arithmetik sich ausbreitete, desto allgemeiner fasste sie auch ihre Begriffe. Die Divisionsregel für Potenzen derselben Zahl führte zur Aufnahme der negativen Exponenten, die Wurzelausziehung zu gebrochenen. Es kam nun darauf an, um möglichst einfache Resultate zu gewinnen, die zunächst für ganze Exponenten geltenden Regeln auf diese allgemeinen Exponenten auszudehnen.

Dies geschieht dann schliesslich durch den Induktionsbeweis in der Form:

Ein Exponent ist entweder positiv oder negativ, ganze oder gebrochene Zahl. — Die Regeln für positive Exponenten gelten auch für negative etc.

Also gelten sie allgemein.

Es kommt in allen solchen Schlüssen darauf an, Störungen, die die Allgemeinheit eines Satzes beeinträchtigen könnten, aufzuheben und die Wahrheit in ihrer durchgreifenden und beherrschenden Kraft auftreten zu lassen. — Die Möglichkeit inkommensurabeler Linien beeinträchtigt z. B. den Satz, dass eine Parallele zu einer Seite eines Dreiecks die beiden anderen in demselben Verhältnisse schneidet; es muss also auch für diesen doch nur dem Gedanken zugänglichen Fall die Geltung des Satzes erhärtet werden. —

Der Kästner'sche Beweis des Binomialgesetzes ist ein strenger Induktionsbeweis.[1] Er stützt sich darauf, dass wenn $(a + b)^n = a^n + na^{n-1} b + \frac{n . (n-1)}{1 . 2} a^{n-2} b^2 + \ldots$ so ist auch $(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + (n + 1) a^n b + \frac{(n + 1) n}{1 . 2} a^{n-1} b^2 + \ldots$ Es ist aber das Gesetz richtig für $n = 2$, also auch für $n = 3$ und weil für $n = 3$, auch für $n = 4$ etc. Dass die Induktion in der That für die unendliche Reihe ausgeführt werde, ist

[1]) Ich kann mich nicht entschliessen, diesen Beweis mit Wundt (Logik I. pag. 313) einen Schluss der Analogie zu nennen. —

nicht nötig, da es klar ist, dass jede ganze Zahl aus der vorherigen durch Addition der 1 entsteht.

Erschiene die Form des Satzes in diesem Beweise nicht als ein Geschenk, von dem man nicht weiss, woher es kommt, so liesse sich gegen ihn nichts einwenden; logisch zwingend bleibt er immer. —

Eine Bemerkung über die Induktionsschlüsse in der Mathematik möge noch hier statthaben. In vielen Fällen sind solche Schlüsse nicht schöpferisch, sondern nur zusammenfassend erleichtern sie den Überblick. Doch giebt es Sätze, in denen die Induktion sich vorzugsweise wirksam erweist. — In dem verbesserten euklidischen Beweise, dass eine Gerade, die auf zwei Linien senkrecht, auch auf der durch diese bestimmten Ebene senkrecht steht, tritt eine Linie als Repräsentant aller auf; ebenso werden in dem Satze, dass vier harmonische Strahlen jede Transversale harmonisch teilen, alle durch eine ersetzt. —

Die Projektionslehre liefert weiter schöne Beispiele, dass der Beweis eines partikulären Falls genügt, um von da aus eine ganze Reihe anderer partikulärer Fälle als wahr zu erkennen. An sich gilt, was für den Kreis wahr ist, noch nicht für jeden Kegelschnitt; die projizierenden Ebenen und Strahlen vollführen aber für eine bestimmte Klasse von Sätzen die Ausdehnung von Partikulärem auf anderes Partikuläres, so dass dann der disjunktive Schluss nur ein leichter Rückblick wird.[1] —

Von den alten lateinischen Schlussregeln: ex mere particularibus nihil sequitur; ex mere negativis nihil sequitur; conclusio sequitur partem debiliorem — dürfte beim Unterricht keine so oft in Anwendung kommen, als die dritte und zwar im indirekten Beweise. — Eine vorher gedachte Möglichkeit soll sich als nicht wirklich erweisen; sie wird zunächst in der Vorstellung aufgenommen, aus diesem nur allein in der Vorstellung sich befindenden Grunde werden mittelst erkannter Wahrheiten Folgerungen gezogen, die nach diesem Grundsatze auch nur zunächst in der Vorstellung sich befinden. In einem solchen Beweise werden deshalb, obwohl die Obersätze dem Gebiet

[1] Vergl. Salmon, Analytische Geometrie der Kegelschnitte, Abschnitt über Projektionen.

des Wirklichen angehören, dennoch die Schlusssätze nur im Kondicionalis stehen dürfen, weil derselbe durch die Untersätze in die Syllogismen hineinkommt. —

X. Lehre vom Zeichen.

(§ 37.)

Die Mathematik wird Beispiele für den Erkennungsgrund (τεκμήριον), Physik und beschreibende Naturwissenschaften werden solche sowohl für das beweisende, als auch für das lösliche Zeichen (σημεῖον λυτόν) leicht darbieten.

In der Botanik liefert die Anzahl der Staubgefässe wenigstens bis zur zehnten Linnéischen Klasse den Einteilungsgrund. Der botanisierende Schüler bestimmt darnach, findet Trientalis und will diese Pflanze nach Linné in die sechste Klasse einreihen, sieht aber, dass in seiner Flora keine Pflanze aus der sechsten Klasse der gefundenen entspricht. Der Irrtum hatte seinen Grund darin, dass er den Obersatz: —

Die Anzahl der Staubgefässe bestimmt die Klasse

für allgemein bejahend hielt nnd nicht wusste, dass bei einigen Blumen dieselbe variiert, bei Trientalis speziell zwischen fünf und sieben.

Oder er ist, nachdem er mehrere Labiaten gesammelt hat, durch den äusseren Habitus zu dem falschen Obersatze verleitet worden, dass alle Labiaten der vierzehnten Klasse angehören, und möchte nun gern schliessen, dass auch Salvia derselben beizuzählen sei.

Zu solchen fälschlich für allgemein gehaltenen Obersätzen wird man oft verleitet werden, wenn man vor der hauptsächlichsten Bedingung andere zuweilen eintretende nebensächliche übersieht. Dass es Nordwind ist, wenn die Windfahne nach Süden zeigt, ist nicht stets notwendig; es können Erfordernisse fehlen; die Axe kann schief stehen oder es kann hindernde Reibung stattfinden.

Wenn das Experiment in der Physik darauf ausgeht, eine Erscheinung zu isolieren, störende Nebenursachen zu vermeiden, Beobachtungsfehler zu vermindern, so will es gerade die notwendigen Zeichen klar erkennen, die als Folgen einfacher Ursachen sich kundgeben und den Rückschluss gestatten. —

Beim Unterrichte wird darauf z. B. einzugehen sein, dass die Obertöne die Klangfarbe bestimmen. Man beginnt, nachdem gezeigt worden, wie die halbe Saite die Oktave des Grundtones giebt u. s. w., mit dem einfachen Versuche, dass man die Saite im ersten Viertel streicht und dann durch Berühren der Mitte den Grundton auslösebt. Dass dann die Oktave nachklingt, ist ein τεκμήριον dafür, dass die Oktave bereits im ersten Klange enthalten war. Es ist dies aber der Fall, weil der Obersatz: „wenn die Saite als halbe schwingt, tönt die Oktave" — allgemein und konvertierbar war. Denn, wenn die Spannung der Saite bleibt, ist der Vordersatz die alleinige Ursache des Nachsatzes. —

Oder: Wenn in der Elektricitätslehre entschieden werden soll, ob die sogen. Fluida an den Kollektorplatten oder an der isolierenden Glasscheibe haften, so lässt man darauf merken, dass kein Funke erscheint, wenn man die Platten ohne die Isolierschicht vereinigt, dass der Apparat aber noch geladen, wenn man ihn dann wie zuerst zusammensetzt. — Ebenso ist der zweite Funke ein beweisendes Zeichen für das Residuum.

Aber es wäre ein falcher Schluss, den Schüler oft machen, dass, wenn ein festgehaltenes Stück Eisen ein anderes bewegliches anzieht, das erstere ein Magnet sei. Die Täuschung ist deswegen möglich, weil das Gegenseitige bei jeder Anziehung oft übersehen wird und das Urteil: „Der Magnet zieht Eisen an", nicht so ohne weiteres sich umkehren lässt. Deshalb konnte das bewegliche Stück der Magnet sein und das festgehaltene weiches Eisen. Damit ein Magnet als solcher erkannt werde, wird also stets das Zeichen des gegenseitigen Abstossens gleichnamiger Pole als ergänzend eintreten müssen. —

Die Chemie mit ihren Reagentien, die Mineralogie mit ihrer Kennzeichenlehre gehen Anwendungen genug. Es ist gerade die Aufgabe dieser Disziplinen, für solche Dinge die Sinne und den Verstand zu schärfen, damit die Schüler Nebendinge von Hauptsachen trennen lernen. Fiat applicatio. —

Dass die τεκμήρια ihre Anwendung besonders in der Mathematik finden, hat in der meistens möglichen Konversion ihrer Sätze seinen Grund. So ist ein jedes Sehnenviereck, dessen Diagonalen

Durchmesser sind, ein rechtwinkeliges; so schliesst man, da, wenn $\sphericalangle \alpha$ kleiner oder gleich oder grösser als 90^0, auch $\cos \alpha$ grösser, gleich oder kleiner als 0, umgekehrt auf einen spitzen oder rechten oder stumpfen Winkel α im Dreiecke, je nachdem $b^2 + c^2 - a^2$ positiv, oder gleich 0, oder negativ ist.

Ortsbestimmungen geben weiter passende Beispiele. — Weil in jedem Dreiecke

$$2\,t_c^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 + b^2,$$

so ist der Ort für die Spitzen aller Dreiecke über derselben Grundlinie ein Kreis, wenn die Quadratsumme der Seiten konstant bleibt. Man hat nur obiger Identität die Form

$$t_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

zu geben, um sie als Erkennungsgrund ans Licht zu stellen. —

Oder man bestimmt als das notwendige Zeichen dafür, dass bei einfachen Koordinaten eine Gleichung zweiten Grades den Kreis kennzeichnet, die Form

$$ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0,$$

in welcher die Koeffizienten der Quadrate gleich sind und das Glied mit xy fehlt, weil durch fortgesetzte Identitäten die Gleichung auch in

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2}{4a^2} - \frac{d}{a}$$

leicht umgeformt wird.

Die Methoden, durch die man in der Algebra die Schüler erkennen lehrt, wie kompliziertere Gleichungen sich auf einfachere zurückführen lassen, sind ebenfalls nur Anwendungen dieser Lehre vom Zeichen. —

XI. Die Analogie.

(§ 38.)

Das Eigentümliche derselben ist, aus dem bekannten Einzelnen nur in der Absicht ein allgemeines Gesetz zu bilden, um durch rasche Vorwärtsbewegung wieder zu einem zu erforschenden Einzelnen herabzusteigen.

Ihr Vorkommen in der Mathematik, obwohl sie in anderen Dis-

ziplinen heimischer, ist nicht selten; sie bildet z. B. bei Auflösungen von Aufgaben, beim Bilden von den das Gesetz eines Vorgangs ausdrückenden Formeln ein wichtiges Hülfsmittel. —

Die Gleichungen

$$x + y = s$$
$$xy = p$$

lassen sich leicht lösen; der Rechner schliesst dann weiter, dass, da diese Gleichungen sich lösen lassen, sich jede Aufgabe ebenso lösen lässt, die Summe und Produkt von zwei Unbekannten als gegeben enthält, und es folgt nun, wenn etwa:

$$ab + ax + by + xy = p$$
$$x + y = s$$

vorliegt, die Zurückführung auf jenes Allgemeine durch die Substitutionen:

$$a + y = u$$
$$b + x = v.$$

Ebenso ist die Reduzierung reziproker Gleichungen dritten oder vierten Grades auf quadratische hauptsächlich ein Schluss der Analogie. Die Substitution $x + \frac{1}{x} = u$ führt zum Ziele. — Es ist hier weniger die Aufgabe, aus dem Einzelnen das umfassende Ganze, die allgemeine Regel, zu finden; — in den angezogenen Fällen ist dies das Bekannte (hier die Möglichkeit, eine quadratische Gleichung zu lösen) — vielmehr ist es die Kunst des Rechners, das vorliegende Besondere (die reziproke Gleichung) so umzuformen, dass es als ein Fall des Allgemeinen erscheint. —

In der Trigonometrie haben die neueren Lehrbücher durch eine praktische Bezeichnung es erleichtert, solche Schlüsse der Analogie zu machen, eine Formel aus einer anderen durch „Wechseln der Indices im Turnus“ unmittelbar abzuleiten.

Aus $\rho = \dfrac{a \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$ folgt nach strenger Analogie

$$\rho = \frac{b \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}};$$

oder aus $\cot \frac{\beta}{2} = \frac{\rho_\alpha}{\left(\frac{s}{2} - c\right)}$ folgt

$$\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_\beta}{\left(\frac{s}{2} - c\right)} \text{ etc.}$$

Die Gedankenbewegung ist an sich hier einfach; die erste Formel lässt das allgemeine Gesetz, obwohl sie an sich ja speziell ist, durch ein blosses Übersetzen in einen wörtlichen Ausdruck ungemein leicht erkennen; das Allgemeine erscheint durch die praktisch gewählte Bezeichnung gleichsam unter einem so durchsichtigen Schleier, dass seine Züge sich dem Verständnis klar darbieten. Wenn in der Kombinationslehre die Formel für die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholungen etwa bis zur dritten Klasse entwickelt und als

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$$

gefunden worden ist und dann gesagt wird: also ist die Formel für die pte Klasse allgemein:

$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdots \frac{n-p+1}{p}$$

so ist das nicht oberflächlich geschlossen, sondern strenge Analogie, wenn die Ableitung der Formel für die dritte Klasse aus der für die zweite so gehalten worden ist, dass ersichtlich wurde, in wiefern das Bildungsgesetz von dem partikulären Falle unabhängig ist. Das Allgemeine ist ja im besondern die treibende Gewalt und ein solcher Schluss unterliegt ebensowenig einem Bedenken, als wenn gesagt wird, das nte Glied einer geometrischen Reihe ist ac^{n-1}, nachdem das 2te und 3te als ae und ae^2 gefunden worden ist.

An das von Drobisch (pag. 191) beigebrachte Beispiel, dass bei den Gleichungen

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c'$$

die für x den Wert $\frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$ ergeben, aus diesem x unmittelbar die andere Lösung $y = \frac{a'c - ac'}{ba' - b'a}$ folge, sei noch erinnert.

Die Analogie ist in der Sprache der wissenschaftlichen Einsicht, dass ähnliche Erscheinungen in der Wirklichkeit durch dasselbe Grundgesetz bestimmt werden, vorausgeeilt. Man sprach von Klangfarbe in der Musik, wie von den Farbentönen der Gemälde, ehe durch die Wellenlehre genau erkannt und durch exakte Messungen bei Durchforschung der Interferenzerscheinungen festgestellt wurde, dass, wie die Töne durch die regelmässigen Schwingungen der Luft, so die Farben durch die des Äthers entständen. Das eine ist ein partikulärer Fall der allgemeinen Wellenbewegung wie das andere.

Somit dürfte auch hier die Analogie, obwohl sie in anderen Gebieten grössere Bedeutung hat, sich als ein Mittel bewähren, scheinbar Entlegenes zu verbinden und den Blick umfassender zu machen. —

XII. Analysis und Synthesis.

(§ 39.)

Es ist der angegebene kurze Abschnitt die einzige Stelle, wo von dem Unterschiede zwischen dem progressiven Wege der Synthesis und dem regressiven der Analysis, der Erkenntnis, die von den Gründen ausgeht, und der, die zu den Gründen hinführt, eingehender gehandelt werden kann. Oben (VIII) war bereits bemerkt worden, wie der Syllogismus, für sich allein nur die Bedeutung eines gesicherten Schrittes habend, über sich hinausweist. Es ist daher notwendig zu zeigen, wie er als Mittel dienend sich dem Ganzen einordnet, und somit den Pfad zu finden, der zum Ziele führt. — „Das analytische Verfahren sucht aus den gegebenen Erscheinungen den gestaltenden Grund, das synthetische entwirft aus dem ergriffenen Grunde die Erscheinungen.“ [1])

Nehmen wir, um die Gedanken zu fixieren und bestimmter zu machen, eine geometrische Aufgabe. [2]) Es sei ein Dreieck zu konstruieren aus einer Winkelhalbierenden, aus der Höhe, die vom Scheitel des halbierten Winkels gefällt ist, und dem Radius des um-

[1]) Logische Untersuchungen. II. 321.

[2]) Trendelenburg giebt (pag. 324) den Weg im allgemeinen an, Drobisch erörtert (pag. 166) eine einfache Aufgabe.

schriebenen Kreises (w_α = ad, h_α = ae, r mögen in hergebrachter Weise die Data bezeichnen).

Der Gang der Analysis ist etwa dann folgender. Winkelhalbierende und Höhe bestimmen (s) zunächst (Kongruenzsatz) das rechtwinkelige Dreieck ade; andererseits ist die Höhe zugleich Seite eines anderen rechtwinkeligen Dreiecks aec ($\sphericalangle\ \gamma$ sei $>\ \sphericalangle\ \beta$) und somit ist der eine Teil des $\sphericalangle\ \frac{\alpha}{2}$ das Komplement zu $\sphericalangle\ \gamma$, der andere $\frac{\alpha}{2}$ — (R — γ); eine an sich leichte Rechnung (s) lässt, da $R = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$, die Grösse dieses anderen Teils als $\frac{\gamma - \beta}{2}$ erkennen. Hier schon ist zweierlei zu bemerken: dieser Wert $\frac{\gamma - \beta}{2}$ ist zunächst ein Ergebnis, von dem wir nicht wissen, ob es zur Lösung hilft, für jetzt ist es wenigstens latentes Kapital; dann aber lag die Nötigung dazu, für R den Wert $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ einzusetzen, in nichts anderem, als in der allgemeinen Norm, in der Analysis möglichst alle Bezüge der Thatsachen unter einander zu erforschen (a). Bis jetzt ist dem Grunde der Sache noch nicht näher getreten; was die Analysis lieferte, war nur die Einsicht in die Möglichkeit, die Richtung der Grundlinie festzulegen. Es wird nun das dritte Datum r in die Betrachtung hineingezogen. Klar ist, dass die beiden Endpunkte b und c bekannt wären, wenn der Ort des Mittelpunktes gefunden werden könnte (a). Ein Zusammenhang mit den anderen Daten wird sich am leichtesten ergeben, wenn ich von den drei Radien den nach der Ecke a gezogenen betrachte (a). Bekannte Sätze zeigen, dass der Winkel, den zwei Radien bilden, je einem doppelten Dreieckswinkel gleich, die durch das Mittellot entstandene Hälfte gleich dem entsprechenden Dreieckswinkel ($\sphericalangle\ \gamma$), also der von ab und r gebildete Winkel = R — γ sei (s). Nun ist der Schlüssel zur Sache gefunden; denn da von $\frac{\alpha}{2}$ auf jeder Seite gleichviel weggenommen, so ist der Winkel zwischen r und w_α gleich dem zwischen h und w_α, also die Lage des Mittelpunktes bestimmt und,

was noch zur Fixierung des Dreiecks fehlte. die Lage der beiden Eckpunkte b und c gegeben.

Die Gründe, d. h. die Festlegung der Richtung der einen Dreiecksseite und der Ort des Mittelpunktes, wurden erkannt durch den Satz, dass Kathete und Hypotenuse ein Dreieck bestimmen und dass w_α mit r denselben Winkel wie mit h_α mache, dessen Grösse durch das obige Dreieck bestimmbar ist. Alles übrige, wie z. B. dass dieser Winkel $\frac{\gamma - \beta}{2}$ sei, dass der andre Teil von $\frac{\alpha}{2}$ die Grösse $\frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$ habe etc., kann nun ausgeschieden werden, als zur Lösung dieser Aufgabe nicht nötig. Ist die Aufgabe abgeändert, sind die Daten etwa h_α, r, $\gamma - \beta$, oder w_α, r, $\gamma - \beta$, so treten jene Relationen in ihr Recht.

Die Stellen, wo die gesamte Analysis mit synthetischen Elementen durchflochten war, sind mit (s) bezeichnet; da, wo der Gang vorzugsweise analytisch, ist ein (a) eingeschaltet. Die letzteren Gedanken sind es, die die Untersuchung charakterisieren.

Das Ausgeschiedene ist ähnlich dem bei einem Experiment nebensächlich Beobachteten, das, an sich wertvoll, zunächst nicht zur Beantwortung der gerade gestellten Frage führt. —

Die ganze Gedankenoperation erscheint zusammengefasst als ein hypothetischer Schluss. Wenn dieses Dreieck das verlangte ist, so ist die Lage der dritten Seite etc. bestimmbar; diese Elemente lassen sich aber konstruieren: folglich ist die Aufgabe lösbar. —

Hier geht dann die Analysis in die Synthesis über, deren Sicherheit nur dann eines Beweises bedürfen wird, wenn in den Bestimmungen keine Zweideutigkeit möglich ist. Es kommt nur darauf an, die vollständige Gegenseitigkeit von Ursache und Folge festzustellen. Sollte in den Schlüssen der Analysis einer gewesen sein, der die Möglichkeit offen liesse, dass die dargelegte Ursache auch eine andere Folge haben könnte, so wäre die strenge Notwendigkeit unterbrochen und die Frage berechtigt, ob die in der Konstruktion hervorgebrachte Ursache dieselbe Wirkung erzeugte. Soll ein Dreieck aus der Summe der Seiten und den Winkeln konstruiert werden, so liegt die Kraft der Analysis, nachdem der Umfang durch Verlängerung der

Seiten hergestellt ist etc., in dem Satze, dass gleichschenkelige Dreiecke gleiche Basiswinkel haben. — Wird der Beweis der Synthesis ausgeführt, so ist es der umgekehrte Satz, auf dessen Anwendung es schliesslich ankommt. — Zeichne ich aber ein Sechseck, dessen Gegenseiten sich in drei auf einer Geraden liegenden Punkten schneiden, so liegen seine Ecken nicht notwendig auf einem Kreise, sondern sie können sich auch auf einem anderen Kegelschnitt befinden. —

Wie in geometrischen Aufgaben die Figur als fertig angenommen wird, so in algebraischen Gleichungen die unbekannte Grösse als bereits existierend; den einzelnen Schlüssen ist hier parallel die Anwendung der bekannten arithmetischen Axiome oder einzelner Lehrsätze; das Ergebnis ist dort die Einsicht in die Möglichkeit einer Konstruktion, hier die Erkenntnis, dass x aus der schliesslich gefundenen Zahlenverbindung herzustellen sei. — Die einzelnen Schritte sind hier wie dort wesentlich synthetische Syllogismen; die Kunst der Analysis beruht auf der zum Zweck hinführenden Kombination derselben.

Analytische und synthetische Betrachtungsweise regelt die Bedeutung der Experimente beim Unterrichte in der Physik. Synthetisch ist das Experiment, wenn z. B. das Gesetz der Interferenz solcher Wellen, die sich um eine halbe Wellenlänge unterscheiden, vorher mitgeteilt und dann etwa die auffallende Erscheinung der Quincke'schen Interferenzröhre gezeigt wird. Analytisch wird verfahren, wenn aus der Bildung der einfachsten Chladny'schen Schallfiguren auf ruhende Linien und auf ab- und aufschwingende Teile der tönenden Scheibe geschlossen wird. Pädagogische Gründe werden schliesslich auf die Wahl dieses oder jenes Ganges einwirken. Ganz und gar analytisch kann nicht im physikalischen Unterricht gelehrt werden; denn das wäre eine Geschichte der Wissenschaft selber. — Aber besonders bei Beginn der Unterweisung ist der analytische Gang einzuschlagen, um sehen, Wesentliches von Unwesentlichem scheiden zu lehren. —

XIII. Der indirekte Beweis.

(§ 43. 44)

Sein Wesen ist die Verneinung des kontradiktorischen Gegenteils des zu Erweisenden; der feste Punkt, auf den er sich stützt, ist also das Identitätsgesetz in der einfachsten Form, dass zwischen widersprechenden Urteilen keine Vereinigung denkbar ist, dass „es unmöglich ist, dass demselbigen dasselbe und in derselben Hinsicht zugleich zukomme und nicht zukomme“ (cfr. V). — Aber obgleich, sind die Gedanken erst bis zum letzten Schlusse angekommen, die Einsicht in die Beweiskraft nicht schwierig ist, so begegnen seiner Anwendung im Unterrichte doch mancherlei Hindernisse, die die klare Auffassung zuweilen beeinträchtigen.

Worin liegt zunächst die Notwendigkeit, einen Beweis indirekt zu führen? Es ist dies eine Frage, die die systematische Anordnung angeht, bei der es sich darum handelt, ob etwas Prinzip oder nicht Prinzip ist, ob ein bestimmter Satz oder seine Konverse das Naturgemässere ist. Darein hat aber ein Schüler keine Einsicht; er muss also hier von aussen geführt werden, und es bringen ihn höchstens misslungene Versuche direkter Entwickelungen auf den Gedanken einer indirekten Begründung. —

Da die reine kontradiktorische Verneinung nicht Grundlage einer Entwickelung sein kann, so ist auf die scharfe Auffassung des disjunktiven Obersatzes[1]) das grösste Gewicht zu legen. Es ist didaktisch nicht richtig, den indirekten Beweis mit: „angenommen, a sei nicht b“ anzufangen. Der Beweis muss mit der Aufstellung der n Fälle, von denen n — 1 schliesslich sich als unmöglich herausstellen, begonnen werden. Dass sich dies meistens einfach macht und auf die mathematische Trichotomie „kleiner, gleich, grösser“ hinauskommt, die sich oft in eine Dichotomie dann zusammenziehen lässt, erleichtert die Sache, hebt aber nicht die Notwendigkeit einer scharfen Fassung auf. —

Nehmen wir ein Beispiel. — In der Geometrie werden die Sätze, dass drei Gerade sich in einem Punkte schneiden, dass drei Punkte

[1]) Vergl. Logische Untersuchungen II. pag. 438.

auf einer Geraden liegen, meistens durch indirekte Beweise dargethan, oder doch durch solche direkte, die schiesslich auf indirekte zurückgehen. Es soll bewiesen werden, dass der sogen. Satz des Menelaos sich umkehren lasse, — (ich nehme die üblichen Bezeichnungen: Dreieck abc, Punkte $\alpha\beta\gamma$ resp. auf bc, ca, ab). Die Behauptung wird dargethan sein, wenn bewiesen ist, dass $\alpha\beta$ durch γ geht. Der Gedankengang ist dann folgender: entweder geht $\alpha\beta$ durch γ oder links oder rechts von γ durch einen auf ab liegenden Punkt x oder y. Wird dann der eine Fall weiter untersucht, so ergäbe sich aus der Folgerung einer solchen Annahme:

$$bx \,.\, c\alpha \,.\, a\beta = ax \,.\, b\alpha \,.\, c\beta$$

und im Verein mit der Voraussetzung:

$$b\gamma \,.\, c\alpha \,.\, a\beta = a\gamma \,.\, b\alpha \,.\, c\beta$$

durch Division, dass

$$\frac{bx}{b\gamma} = \frac{ax}{a\gamma}$$

welcher Schluss dann (entweder selbst oder nach einer leichten Umformung, wenn γ auf der Verlängerung von ab) darauf hinauskäme, dass eine Grösse zugleich kleiner und grösser als Eins sein müsste. Hier tritt dann das Identitätsgesetz ein. — Der Beweis für den gedachten Durchschnitt y verläuft ebenso und fordert keine Zeit mehr. — Nun kommt erst der Schlusssatz zu Stande; es darf nicht eher abgebrochen werden, nicht bei dem „was unmöglich ist.“[1])

In diesem Beispiele ist es leicht, die Sache bis dahin zu treiben, dass die Folgerungen, die aus den schliesslich als unmöglich zu erweisenden Annahmen sich ergeben würden, zu einem Widerspruche mit dem Identitätsgesetze führen; es tritt der Konflikt gleich beim zweiten Schritte ein; in anderen Fällen wird die Annahme erst, indem sie einer Reihe Deduktionen als Basis dient, mit einer ganzen Last beschwert, um sie zur Kollision mit der Voraussetzung zu bringen und dadurch zu zerbrechen.[2]) — Es erschwert dies dem Anfänger die Einsicht. Wie kann, fragt er, aus einer Annahme, die doch schliesslich nicht wahr ist, gefolgert werden? — Wie giebt

---

[1]) Vergl. Lieber und v. Lühmann, Planimetrie, §§ 44, 66, 69.

[2]) Vergl. etwa den Beweis des vierten Kongruenzsatzes in Kambly's Planimetrie.

es eine Logik des Unmöglichen? — Je mehr er gewöhnt worden, die Voraussetzungen der Beweise als real erfüllbare Bedingungen anzusehen, — und dies muss er — desto öfters werden ihm solche Fragen entgegentreten.

Denn die Anschauung kann bei solchen indirekten Beweisen nicht zu Hilfe kommen. Sie würde ja nur Bilder entwerfen müssen, die der Vernichtung anheimzufallen bestimmt sind. Je weniger einfach ein solches vorläufiges Bild, desto leichter ist die Verwirrung im Kopfe des Knaben, der das an der Tafel Gezeichnete für das im geometrischen Sinne Mögliche halten wird.

In leichteren Fällen (z. B. bei dem Satze, dass das Mittellot auf der Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks die Spitze trifft) ist es durchführbar, die vorläufige Unentschiedenheit auch in der Zeichnung darzustellen; in anderen Fällen ist der Weg, eine Verwirrung der sinnlichen Vorstellungen zu vermeiden, die Entwerfung des ganzen Beweises im Kopfe; die Zeichnung werde erst dann vollendet, wenn die Richtigkeit der Sache erkannt ist.

Ein weiteres Hindernis endlich, dessen sichere Überwindung sich aber für die gesamte Denkentwickelung als fruchtbringend erweist, liegt im Grammatischen.

Alle Annahmen und die aus ihnen gezogenen Deduktionen haben sich im Kondicionalis zu bewegen. Je weniger scharf oft die gewöhnliche Ausdrucksweise hier unterscheidet, desto leichter wird gefehlt. Der Indikativ in dem disjunktiven Obersatze wechselt zunächst mit dem Kondicionalis in dem gedachten Bedingungssatze, er kehrt wieder, wenn in die Gedankenreihe eine anerkannte Wahrheit eintritt, der Modus wechselt von neuem in den Schlüssen, die die gedachte Möglichkeit als eine Prämisse enthalten, bis endlich die Behauptung als der nicht mehr anzuzweifelnde Fall, als Rest des Falschen, übrig bleibt. —

Es liegt allerdings eine logische Übung in diesen indirekten Beweisen, und da keine Wissenschaft ohne Prinzipien und Hypothesen existiert, werden sie sich nicht ganz entbehren lassen. Durch die Gewöhnung, das Unmögliche zur Negation seiner selbst zu zwingen, schärfen sie den Sinn für die Wahrheit und haben so ein erziehendes Moment in sich. Aber je vollendeter und entwickelnder der

Gang der Lehrmethoden wird, desto mehr treten sie zurück; da sie meistens bei Konversionen vorkommen, werden sich auch manche indirekten Beweise durch eine schärfere Betonung der konstituierenden Merkmale und die dadurch mögliche Entscheidung über die Konvertierbarkeit erübrigen lassen. — Denn diejenige Notwendigkeit ist die höhere gegenüber dem Unvermeidlichen, welche die Folgen aus den Gründen der Voraussetzungen unmittelbar deduziert. —

XIV. Die Definition und die Ableitung aus Gattung und Artunterschied.

(§ 45 u. f.)

Lehrsysteme drängen zu auf allgemeinerem Grunde stehenden Voraussetzungen, zu Hypothesen und Prinzipien, in der Mathematik speziell zu Axiomen und Postulaten hin. — Der Fortschritt der Sache bringt dann immer neue Entwickelungen; es treten neue Gebilde auf, deren Eigenschaften abgeleitet werden; dies führt zur Aufstellung von Definitionen und Lehrsätzen. Ohne auf weitere Untersuchungen über Systematik zu kommen, möge noch der Blick auf den Ort und die Art des Definierens und die Deduktion der Theoreme gerichtet werden. —

Ist die Entwickelung des Systems wirklich ein folgerichtige (organische möchte ich nicht sagen; das Wort ist in Gefahr, seine richtige Bedeutung zu verlieren —), so muss sich die Stelle, wo eine Definition einzutreten hat, von selbst ergeben. Euklid's Art und Weise ist nicht genetisch, wenn er erst eine Reihe von Nominaldefinitionen giebt, dann erst ihre Darstellbarkeit darlegt, aber nicht sagt, warum der neue Begriff nötig ist. Das System hat zu entscheiden, welcher Begriff fixiert werden soll. So hat der Begriff der Ähnlichkeit erst seine Berechtigung, nachdem die Möglichkeit solcher Dreiecke, deren Winkel gleich und deren Seiten proportional sind, dargethan ist; so erscheinen die negativen Exponenten erst durch die Erweiterung der Divisionsregel für positive, die Kreistangente tritt auf erst durch die Betrachtung der dreifachen Möglichkeit, dass die Entfernung einer Geraden vom Mittelpunkte eines Kreises grösser als der Radius, ihm gleich oder kleiner als derselbe sein kann, oder

vielleicht genetischer durch das Zusammenfallen der beiden Schnittpunkte der Sekante.

J. Steiner's „geometrische Konstruktionen“ können hierin als Muster gelten, obschon eine schärfere Fassung des Wortlautes bei den Definitionen das vortreffliche Buch für Schüler geeigneter machen würde. Da treten die Definitionen nicht hin und erwarten von gütiger Hand nachträglich ihre Legitimation, sondern es wird (§ 3) die Existenz harmonischer Gebilde erst nachgewiesen, dann der Name eingeführt; ebenso wird das Gesetz, dass sich die dritten harmonischen Punkte eines Strahlenbüschels auf einer und derselben Geraden befinden, wenn die zweiten und vierten der Kreisperipherie angehören, erst dargethan, ehe die Namen Pol und Polare gebraucht werden. —

Es kann ja der Fall sein, dass verschiedene Definitionen, formal genommen, genügen. — Z. B. könnte das Viereck, dessen Gegenseiten gleich sind, als Parallelogramm definiert und der Name dann a posteriori als berechtigter nachgewiesen werden. Die Gründe der Wahl sind dann einerseits das Anschliessen an den vorhandenen Sprachgebrauch, oder andererseits systematische, indem die einfachste und für die Entwickelung der Sache fruchtbarste Definition den Vorzug verdienen wird.

Aber wie zum Aufgehen des Samenkornes zuerst gehört, dass es wirklich keimfähig sei und dann, dass günstige Umgebung, Regen und Sonnenschein den Keim zur Entfaltung bringen, so auch hier. Was nicht im Begriffe implicite liegt, kann nicht daraus hervorgelockt werden. — Als Führer des Gedankens dient vor allem hier das Wort der „Erläuterungen“ (pag. 114); „Der artbildende Unterschied hat auf dem Grunde des Allgemeinen besondere Bedeutung; denn von ihm hängt die eigentümliche Erkenntnis ab, welche allein die Sache wirklich fasst und nicht darüber hinschwebt (das οἰκεῖον im Gegensatz des blossen καθόλου.“)[1] Am rechtwinkeligen Dreiecke hat Trendelenburg hierfür ein durchschlagendes Beispiel gegeben.

---

[1]) Vergl. weiter Logische Untersuchungen, Abschnitt XIX, insbesondere pag. 400: „Daher ist die Aufgabe, die Sache gleichsam im Berührungspunkte des Allgemeinen und Besonderen aufzufassen. Wo beide sich lebendig durchdringen, da haben die Eigenschaften der Sache ihren Ursprung.“

— Gerade beim Unterrichte wird sich Gelegenheit bieten, dergleichen Betrachtungen fruchtbar zu machen. Machen wir einen weiteren Versuch. — Es wird in dem Beweise des ptolemäischen Lehrsatzes (die Ecken des Sehnenvierecks seien abcd mit herumgehenden Buchstaben) gesagt, nachdem beide Diagonalen gezogen: lege den Winkel abd an bc in b an; es ergeben sich dann als ähnliche Dreiecke (der Durchschnitt der Hilfslinie mit ac sei e) △ bec ∾ △ bad und △ bea ∾ △ bcd, und die ruhige Entwickelung der Folgen der Ähnlichkeit führt dann leicht zum Ziele. Ja, aber woher stammt der Gedanke, ähnliche Dreiecke haben zu müssen, und die Notwendigkeit der Hilfslinie? Sehen wir, ob die Entwickelung der differentia specifica darauf führt.

Die spezifische Eigenschaft ist, dass die Figur ein Kreisviereck sei; daher ist ∢ abc das Supplement zu ∢ cda, aber es ist auch ∢ acd + ∢ cad das Supplement von ∢ adc: folglich muss sich ∢ abc auf zweierlei Art so teilen lassen, dass seine Teile den einzelnen Dreieckswinkeln gleich sind. — Die eine Teilung führt zu der Diagonale bd, weil gleiche Peripheriewinkel, wenn sie in demselben Sinne gemessen werden und einen Endpunkt ihres Standbogens gemeinsam haben, demselben Bogen angehören; die andere Teilung führt zu dieser Hilfslinie, die somit ungesucht erscheint. — Dieses Beispiel, wie jedes andere, in seine Syllogismen aufgelöst, zeigt die Bedeutung des Mittelbegriffs.[1]) Hier lautet der Syllogismus:

In jedem Kreisvierecke sind die Gegenwinkel supplementär;
das gegebene ist ein Kreisviereck etc.

Selbst die Hilfslinie in dem Beweise des Satzes, dass die Summe der inneren Dreieckswinkel zwei Rechte beträgt, erscheint oft nicht genügend motiviert. Mag der Satz vom Aussenwinkel vorangehen und jener daraus folgen, oder mag die umgekehrte Anordnung beliebt werden, immer bleibt die Schwierigkeit ungehoben, so lange man sich auf den blossen Befehl: ziehe die Parallele — beschränkt. — Eine genügende Ableitung ergiebt sich erst, wenn das Dreieck bei diesen Winkelsätzen nicht als eine Fläche aufgefasst wird, deren begränzende Seiten in den Ecken endigen, sondern als das Gebilde dreier sich

[1]) Vergl. Elementa logices §§ 62. 63.

schneidender Linien, und wenn in der vorausgehenden Lehre von den Parallelen die Parallelverschiebung und Drehung als Mittel geometrischer Entwickelungen eingeführt und erläutert werden.[1]) Ähnlich verhält es sich mit dem aus einem Lehrbuche in das andere übergehenden Beweise des Satzes, dass das gleichschenkelige Dreieck gleiche Basiswinkel hat. — Woher stammt die Nötigung zur Halbierung des Winkels an der Spitze? Wird sich der Schüler nicht vielleicht fragen, ob die Gleichheit der Winkel noch bestehen bleibt, nachdem die helfende Halbierungslinie gelöscht worden? — Ungekünstelt und sachgemäss erscheint derjenige Beweis, der ein mit dem vorliegenden identisches Dreieck umwendet und auch das umgeklappte Bild als mit dem ersten identisch erweist.[2])

Dass aber der Keim sich fröhlich entwickele, dazu gehört ein günstiger Boden. Wieviel wirkt nicht in der Steiner'schen Betrachtung der Kegelschnitte die Einführung der Gegenpunkte, oder das Dreieck mit den beiden, dem ein- und angeschriebenen, Kreisen, welches durch Rotation den Kegel und die beiden hineingeworfenen Kugeln erzeugt![3]) — Wie aufhellend und durchgreifend ist nicht für die Ableitung der Sätze über die „vier merkwürdigen Punkte“ die von Steiner eingeführte Betrachtung, die von den Ähnlichkeitspunkten ausgeht! —

Es ist, soll nicht dogmatisch gelehrt, sondern genetisch entwickelt werden, nicht gleichgiltig, ob einem Satze oder seiner Umkehrung die erste Stelle gebührt. Nimmt man den Satz, der zur Konstruktion des regelmässigen Zehnecks führt, zuerst in folgender Fassung vor: „Ist in einem gleichschenkeligen Dreiecke die Basis gleich dem grösseren Abschnitte des stetig geteilten Schenkels, so ist das Dreieck das Polygondreieck des regulären Zehnecks“, so erscheint er wie das Mädchen aus der Fremde.

In genetischer Entwickelung ist seine Umkehrung ursprünglicher. Bei der Betrachtung der Grösse der Centriwinkel regulärer Polygone ergiebt sich z. B. beim Sechsecke aus dem Allgemeinen, dass jedes

[1]) Vergl. Joh. Müller, Lehrbuch etc., Bremen 1870, auf das an dieser Stelle besonders aufmerksam gemacht werden möge.

[2]) Vergl. Fresenius, die psychologischen Grundlagen etc. pag. 171.

[3]) Vergl. J. Steiner's Vorlesungen I, Kap. 3 und 6. —

Polygondreieck ein gleichschenkeliges, und aus dem Besonderen, dass der Centriwinkel = 60°, in Wechselwirkung, dass es ein gleichseitiges Dreick, also der Radius gleich der Seite sei. — Ebenso ist das Besondere beim Zehnecke, dass sein Centriwinkel = 36°, also jeder Basiswinkel = 72°, mithin doppelt so gross ist. Dadurch ist die Halbierung gefordert, und daraus entstehen dann ähnliche Dreiecke etc., sodass also der Satz heissen muss: Die Linie, welche im Polygondreiecke des regulären Zehnecks den Basiswinkel halbiert, teilt die Gegenseite nach dem goldenen Schnitt und der grössere Abschnitt ist gleich der Seite des Zehnecks.[1]) —

XV. Die Hypothese.

(§ 65, 66.)

Die Sprache der mathematischen Lehrbücher vermeidet das Wort Hypothese seit einiger Zeit; man nennt den Ausgangspunkt eines Beweises die Voraussetzung, und wenn man bei indirekten Schlüssen die Fälle, welche ausgeschlossen werden sollen, vorläufig zu Grunde legt, bis sie zu unmöglichen Konsequenzen führen, so gebraucht man das Wort Annahme. Aber es ist noch nicht zu lange her, dass die Voraussetzung mit hypothesis, die Annahme präzis mit antithesis bezeichnet wurde. Es mag also im Unterrichte daran erinnert werden, dass ursprünglich Hypothese auch die zu Grunde liegende Thatsache (aliquam rem esse aut non esse) bedeutete.

Aber es wird wegen des naturwissenschaftlichen Unterrichtes unumgänglich sein, auf die Bedeutung der Hypothese im neueren Sinne einzugehen; jeder besondere Abschnitt der Physik wird darauf führen. Inwiefern der Ausdruck bereits in einer Stelle des Archimedes[2]) wurzelte, ist als Interesse erregend zu erwähnen.

Es ist aber die Hypothese die im Verstande antizipierte Vorstellung von der Ursache und den Bedingungen einer bestimmten Gruppe von Erscheinungen.[3]) Dieses Moment, dass zwar die Beo-

[1]) Es sei nochmals die anregende Schrift von Dr. Fresenius erwähnt; besonders in Beziehung auf diesen letzten Abschnitt vergl. pag. 145 u. f.

[2]) Elementa log. pag. 158.

[3]) Vergl. Wundt, Logik I. pag. 401 und II. pag. 300 ff.

bachtung der Thatsachen den Anstoss giebt, aber diese Antizipation keinesweges nur der Empirie entstammt, sondern eine freie geistige That ist, darf nicht übersehen werden. Die Induktion, die darauf führt, ist keine vollständige, und man verlässt das Gebiet des bloss Thatsächlichen. — Weitere Beobachtungen werden dazu führen die Hypothese umzustossen oder sie immer mehr anzuerkennen, aber etwas Subjektives wird ihr immer verbleiben.

Der Schüler ist durch alle Disziplinen gewöhnt von aussen her zur Erkenntnis der Objekte geführt zu werden; desto mehr ist wenigstens das Verständnis dafür anzubahnen, dass der Weg hier ein anderer wird, aber um der Einheit des Wissens willen betreten werden muss.

Eine didaktische Bemerkung sei hier gestattet. Die meisten Lehrbücher fangen mit einer Orientierung an in einem einleitenden Abschnitte „über die allgemeinen Eigenschaften der Körper." Aber hier ist gerade ein weites Feld für Hypothesen. Moleküle und Atome, Kohäsion und Aggregatzustände, Masse, Schwere und Gewicht u. s. w.: das sind für den Anfänger nicht leichte Dinge, zu denen er kommt, nachdem er im besten Falle, wenn er offenen Sinnes ist, durch Selbstübung oder Unterricht in einzelnen Teilen der beschreibenden Naturwissenschaften etwas beobachten und unterscheiden gelernt hat.

Es wird sich daher empfehlen, diese Einleitung auf das geringste Mass zu beschränken, lieber bei einer eng begrenzten Gruppe von Erscheinungen länger zu verweilen und an der betreffenden Stelle das Nötige nachzuholen. Die Lehre vom Magnetismus wird sich dazu eignen. Nachstehend mag bezeichnet werden, wo von Hypothesen in diesem Abschnitte die Rede sein muss. —

Man sieht das Thatsächliche des Anziehens und Abstossens; dass man es einer Kraft zuschreibt, ist bereits Hypothese, die geläufigste fast, aber nicht die leichteste. — Ob diese Kraft durch Streichen eines anderen Stahlstabes mitgeteilt, oder in ihm erweckt wird, ist zunächst unsicher. — Man entscheidet sich für das erstere, weil der erregende Magnet nichts an seiner Kraft verliert. Die neue Hypothese zweier unreizbarer Fluida wird eingeführt, die als Sitz solcher Kräfte obige Thatsachen bewirken. Zunächst wird man sich diese Fluida so verteilt denken, dass dieselben vom Indifferenzpunkte

an in nach den Enden zunehmender Stärke in jeder Hälfte des Stabes vorhanden seien. Das Zerbrechen des Magnetes zeigt durch indirekten Beweis, dass diese Annahme falsch ist. Mit acceptabler Wahrscheinlichkeit gelangt man (wobei nun die neue Hypothese der Zusammensetzung der Körper aus Molekülen zu besprechen wäre) zur Annahme von Molekularmagneten. Aber auch hier wäre eine doppelte Vorstellung möglich, ob nämlich jedes Molekül in ein für alle Mal bestimmter Lage beide Fluida enthielte, oder ob in einem Moleküle die Fluida ihre Plätze wechseln können. Der Versuch, den man mit einer Stahlspähne enthaltenden Röhre anstellt, mag als beweisend gegen die zweite Annahme gelten. Dies ist aber ohne die neue Hypothese, dass gegen alle sinnliche Wahrnehmung die Moleküle auch in festen Körpern Beweglichkeit haben, nicht möglich. Endlich beruht das Ganze auf der Annahme der Coërcitivkraft.

Somit sind es sechs Hypothesen, die eine einheitliche Theorie des Magnetismus erst möglich machen. Man kann an keiner Stelle sagen, dass diese oder jene Kraft da sei, sondern nur, dass man sich dies so vorstellen muss. Es ist ein ziemliches Quantum Gedankenarbeit nötig, um ein Verständnis herbeizuführen; hypothetische Syllogismen, indirekte Beweise, Analyse und Synthese wechseln mit einander ab. Immerhin ist es aber eine eng begrenzte Zahl von Erscheinungen und es sind einfachere Anschauungen, die in das Wesen physikalischer Erkenntnisse einführen.

Ganz ähnlich dürfte das Verfahren bei Beginn der Elektricitätslehre sein. Es muss hier die unzähligen Erscheinungen zu Grunde liegende Hypothese der Influenz sobald als möglich erörtert werden. Lehrbücher reden noch oft von einer Mitteilung[1], welcher Ausdruck falsche Vorstellungen erwecken kann, während doch die einfachsten Thatsachen des Anziehens ohne die Influenzhypothese nicht verstanden werden können.

Der Elektromagnetismus wird dann weiter dahin führen, durch die Vergleichung eines Solenoids mit einem Magneten den Weg zu zeigen, wie die rezipierten Fluida sich durch die um die Eisenmoleküle spontan rotierenden Ströme ersetzen lassen und diese An-

[1]) Vergl. Koppe § 118; Krebs § 222.

nahme geeignet ist, wenigstens zwei Gebiete physikalischer Erscheinungen in eine erstrebte Einheit zu bringen.

Je bedeutender der Bau ist, der auf einem Fundamente ruht, und je fester er steht, desto mehr vertraut man der Grundlage. Die innere Übereinstimmung der Theorie hält den Grundstein im gemeinsamen Boden fest. — Ob es möglich ist, in der Schule bereits darauf hinzuweisen, dass die Hypothesen, die in verschiedenen Gruppen von Erscheinungen aufgestellt wurden, sich nicht untereinander widersprechen dürfen, mag dahingestellt bleiben. Es wäre ein schöner Lohn, wenn eine vorläufige Einsicht in die Notwendigkeit der Einheit aller Erkenntnisse erreicht würde. —

Jede bewährte Hypothese ist ein Schritt näher zum πρότερον τῇ φύσει, und doch liegt ein wesentlich Subjektives in der Aufstellung einer solchen. Das ist ein anscheinender Widerspruch. Vielleicht, dass ein oder der andere denkende Schüler davon eine Ahnung hat, und dass ihn dies als heilsame Skepsis, die nach Einheit hinstrebt, zu tieferen Studien treibt. —

Trendelenburg wies am Schlusse seiner Erläuterungen darauf hin bei der Anführung der berühmten Stelle aus Aristoteles, de anima III, 5, in welcher vom νοῦς παθητικός und vom ποιητικόν die Rede. — Ich möchte dabei an das entsprechende Wort Goethe's erinnern:

Wär' nicht das Auge sonnenhaft,
Wie könnte es das Licht erblicken! —

J. F. Starcke, Berlin W.

$$\frac{mw}{m+w} = \frac{m}{\frac{m}{w}+1}$$


Syracuse, N. Y.
Stockton, Calif.
U. C. BERKELEY LIBRARIES
C042447437
YD 2884.